Ю. І. ГОРОБЕЦЬ А. М. КУЧКО І. Б. ВАВИЛОВА

# ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРИРОДОЗНАВСТВІ





## НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



Горобець Юрій Іванович доктор фізико-математичних наук професор. член-кореспондент Академії педагогічних наук України, заступник директора Інституту магнетизму НАН та МОН України, завідувач кафедри загальної та експериментальної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут-Основні лекційні курси. «Термодинаміка і статистична фізика», «Фізика твердого тіла», «Фізика магнітних ввищ». Опублікувая 275 наукових праць, у тому числі монографії, навчальнії посібники, має авторські свідоцтва про винаходи Лауреат премії ім. С. І. Пенарю НАН України в галузі фізики та Державної премії у галузі науки і техніки (2007). Заслужений діяч науки і техніки України



Кучка Андрій Миколайавич, дактор фізико-математичних маук, дошент, професор кафедри теоретичної фізики Донецького національного університету Основні лекційні курси: «Теоретична теханіка», «Капивання та хвилі», «Хвильові процеси», «Механіка суцінного середовища», «Фрактали у фізиці», «Фізична Кінетика», «Додаткові розділи теоретичної механіки». Опублікував вз наукові пракці



Вавилова Трина Бористана, кандидат фізико-математичних наді, старший науковий спіяробітник, доцент кафедри загальної та експериментальної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». У 1984— 2004 роћах працитала в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у 2004— 2007 роках— докторантка Цапіїн НАН України 3 2008 р старший науковий співробітник ГАВ НАН України Основні лекційні курси. «Астрофізика». «Позагалактично астронома», «Актуальні проблеми прифодознавства». Отублікувала понад 80 науково-енциклопедичне видання. Нагороджена цоденом конографії, науково-енциклопедичне видання. Нагороджена цоденом княгині Олаги III ступеня НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАГНЕТИЗМУ ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ "КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"



## Ю.І. ГОРОБЕЦЬ А.М. КУЧКО І.Б. ВАВИЛОВА

## ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРИРОДОЗНАВСТВІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2008

УДК 530.1 ББК 20в6я73 Г70

#### Горобець Ю.І., Кучко А.М., Вавилова І.Б.

# Г70 **Фрактальна геометрія у природознавстві:** Навчальний посібник. — Київ: Наук. думка, 2008. — 232 с. (іл.). ISBN 978-966-00-0682-9

Розглянуто використання концепцій фрактальної геометрії у різноманітних розділах природознавства. Проаналізовано зв'язок поняття фрактала з такими поняттями, як вимірність простору, міра та інтеграл, подібність та автомодельність, дробова похідна та дробовий інтеграл та ін. Наведено приклади канонічних геометричних моделей фракталів — множини Кантора та Коха, криві Серпінського, перетворення типу "підкова" та ін. — і на їх прикладі з'ясовано загальні властивості моно- та мультифрактальних об'єктів, явищ і процесів. Розглянуто окремі проблеми електродинаміки, термо- і газодинаміки, ренормування груп, детермінованого хаосу і хвильових процесів, астрофізики, де застосування фрактальної геометрії підтвердило існуючі парадигми і дало змогу виявити нові властивості фізичних систем.

Для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

#### ББК 20в6я73

#### Рецензенти:

академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Л.А. Булавін доктор фізико-математичних наук, професор В.С. Герасимчук кандидат фізико-математичних наук, доцент М.В. Максюта член-кореспондент АПН України, доктор фізико-математичних наук, професор М.І. Шут

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник (лист № 1.4/18-Г-115 від 22.01.07)

Видання здійснене за державним контрактом на випуск наукової друкованої продукції

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури

Редактори Ю.М. Татаренко, О.А. Микитенко

© Ю.І. Горобець, А.М. Кучко, І.Б. Вавилова, 2008

ISBN 978-966-00-0682-9

Особові геометричні образи та поняття, інколи унікальні, властиві певному розділу природознавства (наприклад, чотиривимірний простір, текстура, дислокація, хвильові функції і т. п.), є основою опису різноманітних природних явищ. У переважній більшості випадків для побудови таких об'єктів використовуються традиційні геометрії, зокрема евклідова, ріманова, Лобачевського.

Проте математики вже наприкінці XIX — на початку XX ст. для побудови неперервних, ніде недиференційовних функцій вивчали та вводили математичні поняття, що виходили за межі традиційної геометрії. Зокрема, останнім часом широко вивчаються фрактали — геометричні об'єкти різьбленої форми (лінії, поверхні та просторові тіла), яким властивий особливий характер однорідності та самоподібності. Термін "фрактал" походить від латинського слова fractus, що значить "дробовий", "ламаний". Цей термін увів професор Бенуа Мандельброт у 1975 р., йому саме належить означення, алгоритм побудови різних типів фракталів, систематизація застосувань фракталів як нерегулярних і самоподібних структур.

Виявилося, що фрактали всюдисущі.

Ці об'єкти плідно використовуються в таких різноманітних розділах фізики, як теорія турбулентності та броунівського руху, фізика конденсованого стану, утворення кластерів та руйнування твердих тіл, теорія протікання в поруватих тілах та процеси в блискавці і т. п. Можна виділити такі чотири групи фізичних явищ, яким притаманні фрактальні властивості: агрегація, випадкові блукання та дифузія, явища протікання та перколяція, динамічний хаос. Фрактальний підхід в інших розділах фізики на сьогодні так чи інакше заснований на аналогіях із цією групою явищ і використовує розвинені для них моделі.

Фрактали стали ефективним засобом стискання інформації в комп'ютерних науках, широко застосовуються для опису різноманітних процесів в астрофізиці, геології, радіофізиці, фізіології та біології. За їх допомогою можна описати структуру дерев, рукавів річок, легенів ссавців, зміну рівня води в річках та морях, зміну цін та розподіл заробітної платні, статистику помилок при обслуговуванні викликів на телефонних станціях, частоту слів у друкарських текстах та багато чого іншого.

Характерною особливістю фрактального утворення є те, що його структура виявляється тільки за сумісного розділення декількох рівнів, різниця масштабів яких ускладнює наочне уявлення цієї структури. Незважаючи на те, що безпосередні спостереження багатомасштабних структур ускладнено, їх послідовний опис може бути досягнутий у рамках фрактальної ідеології. Зокрема, у фізиці твердого тіла такі фрактальні утворення, як дислокаційні структури, скупчення мікротріщин, агрегати у ферорідині, подаються як надансамблі, що випливають з ієрархічно співпідпорядкованих ансамблів, які у свою чергу утворені з підансамблів і т. п. Крім того, у фізиці твердого тіла ієрархічна співпідпорядкованість, самоподібність та масштабна інваріантність, що є фрактальними проявами, спостерігаються не тільки у звичайному фізичному просторі, а й, наприклад, у фазовому просторі для ґраткових моделей із взаємодіями, що конкурують, у просторі імпульсів для хвильових функцій, в енергетичних залежностях для спінового скла та інших невпорядкованих систем, при описі процесів довгочасної релаксації систем, що мають залишкову пам'ять і т. п.

Навчальний посібник складається з двох частин; перша містить у собі необхідний класичний математичний апарат фрактальної геометрії, а друга — усталені успішні приклади застосування фракталів у різноманітних розділах математики, фізики і астрофізики, тобто такі, які не потребують зайвих доказів з точки зору наукової методології і "пройшли випробування часом". Знання такого підходу до опису природознавчих і соціальних явищ, які у своєму втіленні спираються на математично визначений дробовий показник геометричної міри описуваних фрактальних ефектів, і досі залишаються невичерпними. Отже, подальші спроби дослідників "перемасштабувати" ще багато спостережуваних проявів природи з метою знайти їм відповідний новий зміст за допомогою фрактальної геометрії не залишаться непоміченими, а цей підручник допоможе уникнути зайвих запитань.

Властивості фракталів тісно пов'язані з аналізом розмірностей. Тому частина I навчального посібника розпочинається з розділу 1, де розглянуто основні положення аналізу розмірностей, поняття автомодельності та самоподібності, проміжної асимптотики. У розділі 2 показано такі канонічні математичні моделі детермінованих фракталів, як множини Кантора та Коха, криві Серпінського, перетворення типу "підкова" та ін., і на їх прикладі окреслено загальні властивості моно- та мультифрактальних об'єктів. У розділі 3 проаналізовано поняття міри, необхідне як при метричному визначенні топологічної розмірності, так і для розгляду основного поняття теорії фракталів – розмірності Хаусдорфа-Безіковича. Серед різноманітних розмірностей докладніше будуть розглянуті кореляційна, інформаційна, поточкова, спектральна розмірності. У розділі 4 описано властивості та фрактальна розмірність самоафінних фракталів, у т. ч. із застосуванням статистики Герста. Завершує розгляд основних положень фрактальної геометрії розділ 5, у якому охарактеризовано властивості мультифракталів.

У частині II поняття фрактала застосовується для вирішення різноманітних фізико-математичних задач. У розділі 6 подано поняття дробового інтеграла та похідної, їх інтегральні перетворення; розглянуто зв'язок дробового інтеграла із множиною Кантора. У розділі 7 наведено приклади ефективного застосування аналізу розмірностей і фракталів до опису явищ, які традиційно вивчаються у термо- і газодинаміці. У розділі 8 розглянуто використання фракталів в електродинаміці. Зокрема, вивчаються фрактальні прояви в таких фізичних процесах, як агрегація речовини, випадкові блукання та дифузія, протікання та перколяція. Розділ 9 присвячений новітньому фрактальному погляду на ренормування груп, фрагментацію і кластеризацію. Розглянуто також застосування поняття фрактала у нелінійних системах (розділ 10) та процеси поширення хвиль у фрактальних структурах (розділ 11). У заключному розділі частини II розглянуто застосування фракталів і мультифракталів до задач астрофізики (розділ 12).

У кінці посібника наведено список використаної літератури, що рекомендована студентам, які бажають поглибити свої знання з даної теми. Слід зазначити, що наведений список має лише репрезентативний характер і не є повним.

Автори висловлюють щиру подяку академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук Я.С. Яцківу — голові Науково-видавничої ради НАН України — за підтримку у виданні навчального посібника, а також рецензентам — декану фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Л.А. Булавіну; завідувачу кафедри загальної фізики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, члену-кореспонденту АПН України, доктору фізико-математичних наук, професору М.І. Шуту; професору Донецького національного технічного університету, доктору фізико-математичних наук В.С. Герасимчуку; доценту радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидату фізико-математичних наук М.В. Максюті — за висловлені зауваження та рекомендації щодо покращення змісту підручника.

Автори висловлюють подяку студентам 5-х курсів випуску 2003 і 2004 рр. факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які під час слухання лекцій з "Актуальних проблем природознавства" зацікавилися цією проблемою і надали низку актуальних рефератів щодо застосування фракталів у природознавстві. Нове геометричне поняття — фрактал — було впроваджене Бенуа Б. Мандельбротом для опису об'єктів та явищ, що не мають визначеного лінійного розміру.

Поняття фрактала і фрактальної розмірності класично поясняють, порівнюючи два методи обчислення довжини лінії морського узбережжя острова Великої Британії (див., наприклад [84]). Для визначення цієї величини, англійський фізик Л.Ф. Річардсон обрав метод, який застосовувався до звичайних гладких кривих. А саме, на великомасштабній карті досліджувана лінія узбережжя наближалась до замкненої ламаної, що була утворена з відрізків однакової довжини  $\eta$ , а усі її вершини розміщувалися на березі. Довжина ламаної  $L(\eta) = \eta N(\eta)$ , де  $N(\eta)$  — кількість відрізків ламаної, бралася за наближене значення довжини узбережжя. Припускалося, що довжина морського берега визначається граничним переходом:

$$L = \lim_{\eta \to 0} L(\eta).$$

Альтернативний спосіб визначення довжини лінії морського берега полягає в тому, щоб покрити карту сіткою з квадратними комірками розміром  $\eta \times \eta$  та підрахувати кількість комірок  $N(\eta)$ , які містять у собі берегову лінію на карті. Зменшення  $\eta$  призводить до збільшення числа комірок, необхідних для покриття лінії узбережжя. Якщо б лінія берега була звичайною гладкою кривою, що має визначену довжину, то у цьому випадку слід було б чекати, що  $N(\eta) \sim 1/\eta$ , а величина  $L(\eta) = \eta N(\eta) \xrightarrow[\eta \to 0]{} L_0$ , де  $L_0 = \text{const} -$ довжина лінії узбережжя, яку потрібно було знайти. Проте щодо берегової лінії Великої Британії виявилося, що не існує скінченного значення  $L_0$ , а для всього діапазону значень  $\eta$ довжина берегової лінії описується наближеною формулою

6

$$L(\eta) = \lambda \eta^{1-D} , \qquad (1)$$

де  $\lambda > 0$ , D > 1 — сталі. Параметр  $\lambda$  відіграє роль певної міри берегової лінії, а його розмірність не збігається з розмірністю довжини. Подібна поведінка апроксимуючої ламаної берегової лінії обумовлена тим, що її дійсним геометричним образом є не звичайна гладка лінія, що має цілком визначену довжину  $L_0 = \lambda$ (принаймні, для достатньо малих η) і для якої показник степеня D дорівнює 1, а дробова, яка називається фрактальною лінією, з фрактальною розмірністю D > 1 та нескінченною довжиною. Визначення довжин інших берегових ліній привело до такого самого висновку. Графік залежності мір довжин апроксимуючих ламаних для цих ліній та звичайної гладкої лінії (кола) від довжини ланки апроксимуючої ламаної, побудований у подвійному логарифмічному масштабі (рис. 1), кутовий коефіцієнт (нахил) прямих дорівнює 1 – Д. Тут подано також значення безрозмірного параметра D — фрактальної розмірності берегових ліній (параметр *D* також називається розмірністю Хаусдорфа-Безіковича).

Для обчислення фрактальної розмірності слід обезрозмірити довжину  $\eta$  деяким масштабом довжини  $\eta_0$ , прологарифмувати ліву та праву частини формули (1) та спрямувати  $\eta \rightarrow 0$ . У такий спосіб отримуємо співвідношення

$$\ln\left[L\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)\right] = \ln\left[\lambda\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{1-D}\right] \Rightarrow \ln\left[N\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)\right] = \ln\left[\lambda\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^{L}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = \frac{\ln(N) - \ln(\lambda)}{\ln(\eta_0) - \ln(\eta)}.$$

Оскільки при  $\eta \to 0, N \to \infty$   $\ln(N) >> \ln(\lambda)$  і  $|\ln(\eta_0)| << |\ln(\eta)|$ , то для обчислення фрактальної розмірності можна застосовувати

РИС. 1. Залежність довжини апроксимуючої ламаної лінії узбережжя від довжини її ланки (для берегових ліній Австралії (1), Великої Британії (3) та Норвегії (2)) [84]



#### Вступ

асимптотичну формулу

$$D \approx \frac{\ln(N)}{\ln(1/\eta)} \,. \tag{2}$$

Якщо спробувати визначити міру довжини будь-якої ділянки берегової лінії, то виявляється, що вона матиме менше значення  $\lambda$ , ніж для усієї берегової лінії, а значення її фрактальної розмірності *D* буде таким самим, як і усього узбережжя. Отже, величину  $\lambda$  дійсно можна вважати певною мірою берегової лінії (або будь-якої іншої фрактальної лінії). Фрактальні лінії не мають довжини в загальноприйнятому сенсі, але різні ділянки таких кривих можна порівнювати за їх мірою. Наприклад, розглянемо дві ділянки деякої берегової лінії, що мають фрактальну розмірність *D*. Для довжин ламаних, що апроксимують ці ділянки, можна записати фрактальне співвідношення:

$$L_1(\eta) = \lambda_1 \eta^{1-D}, \ L_2(\eta) = \lambda_2 \eta^{1-D}.$$

Очевидно, що відношення цих довжин  $L_1(\eta)/L_2(\eta) = \lambda_1/\lambda_2$  не залежить від довжини ланки апроксимуючої ламаної — способу вимірювання лінії узбережжя, а залежить тільки від властивостей самої берегової лінії.

Зазначимо, що однакове значення фрактальної розмірності уздовж усієї кривої не є обов'язковим. Для того, щоб неперервна крива була фрактальною, необхідно, щоб співвідношення (1) з D > 1 здійснювалось локально, в околі кожної точки кривої. Фрактальні криві, для яких фрактальна розмірність D — стала, називаються однорідними. Якщо фрактальна розмірність D змінюється, то такі фрактальні криві називаються неоднорідними.

Фрактальний формалізм, застосований вище для берегової лінії, тобто для одновимірного геометричного об'єкта, легко можна перенести на об'єкти будь-якої розмірності, оскільки фрактали можна розглядати як множину точок, що вкладені в простір. За означення розмірності тут виступає топологічна розмірність  $D_{\rm T}$ , значення якої завжди дорівнює цілому числу, зокрема топологічна розмірність точки дорівнює нулю, лінії — одиниці, поверхні — двом, об'ємного тіла — трьом. Фрактальна розмірність завжди має дробове значення.

Зв'язок дробової розмірності і подібності полягає в тому, що множину дробової розмірності легше побудувати саме за допомогою подібності об'єкта, коли базова форма подібності майже повністю повторюється у дедалі зменшеному або збільшеному вигляді. Одним із запропонованих Б. Мандельбротом означень фрактала є якраз саме таке: "фракталом називається множина, розмірність Хаусдорфа—Безіковича якої точно більша за її топологічну розмірність",  $D > D_{\rm T}$ . Але це означення не конкретизує природу множини, тобто фрактальні властивості можуть мати не тільки геометричні об'єкти — множини точок, а й множини довільного походження.

 Існує велике розмаїття математичних моделей фракталів, особливістю яких є те, що в їх основі знаходиться певна рекурсивна функція загального вигляду  $x_i = f(x_{i-1})$ . Виявилося, що наведене вище означення виключає з огляду певні структури, що мають фрактальну поведінку. А це свідчить про те, що більш повним є означення: "фракталом є множина, розмірність Хаусдорфа—Безіковича якої не дорівнює топологічній розмірності".

У 1988 р. Б. Мандельброт в особистому листуванні з Дж. Федером запропонував використовувати менш "чутливе" означення: "фрактал — це певна структура, яка складається із подібних до себе підструктур". А в 1989 р. під час проведення міжнародної школи "Фрактальна геометрія і аналіз", коли Б. Мандельброта попросили обговорити та запровадити точне означення фрактала, він зауважив, що будь-яке означення фрактала буде обмеженим і що краще розглядати "фрактал як набір засобів і методів для вивчення нерегулярних, ламаних і самоподібних геометричних об'єктів". К. Фалконер у праці "Фрактальна геометрія: математичні основи і застосування" [12] з цього приводу зазначив, що «до багатоозначенності фрактала треба ставитися як біолог ставиться до означення терміну "життя"». А саме, не існує лаконічного загальноприйнятого означення "що таке життя", а є перелік властивостей, які характеризують живі істоти, зокрема здібність репродукувати собі подібних, рухатися або існувати, певною мірою, незалежно від навколишнього середовища. Більшості живих істот притаманні ці наведені риси, хоча існують і такі, яким не притаманна хоча б одна з них. Отож. перше ніж дискутувати над лаконічним означенням, яке все одно виключить певні цікаві приклади фракталів, краще визначити фрактал як множину, яка має наведені нижче властивості.

Певна множина я називається фракталом, якщо серед її властивостей є такі:

— множина Я має тонку структуру, тобто деталізована на найменших масштабах;

— множина 🕅 є досить нерегулярною структурою, щоб її можна було б описати традиційними геометричними засобами

(геометрії Евкліда або Лобачевського тощо) як на локальному рівні, так і на рівні всієї структури;

— множині я властива самоподібність як у наближеному вигляді, так і у статистичному.

У більшості випадків фрактальна розмірність множини й, що визначена у певний спосіб, більше за топологічну розмірність; множина Я визначається досить просто, можливо, навіть рекурсивно.

Таке означення фрактала за Фалконером дає можливість охарактеризувати множину (об'єкт) як фрактал більш ніж одним означенням фрактальної розмірності. Тим самим існує вибір саме того означення фрактальної розмірності, яке є найзручнішим для дослідження фрактальної поведінки об'єкта.

Найчастіше фрактали класифікують за двома групами: математичні фрактали, тобто такі, що створені вченими, та природні фрактальні об'єкти, зокрема фізичні фрактали. Серед математичних фракталів виділяють детерміновані (геометричні та алгебраїчні) і недетерміновані (стохастичні). Ми приділимо увагу в навчальному посібнику опису властивостей математичних фракталів та алгоритмам їх побудови, проаналізуємо найбільш цікаві фізичні фрактали та наведемо приклади застосування фрактальних методів у різних розділах природознавста, зокрема у фізиці та астрономії. Сподіваємося, що читачам буде так само цікаво пройти з нами шляхами фрактальної геометрії, подивитися на навколишню природу крізь "фрактальний мікро- і телескоп" та спробувати разом із нами створити мистецькі твори — власні рукотворні фрактали.

## ЧАСТИНА

## ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У минулому математики концентрували увагу на множинах та функціях, щодо яких можна застосувати методи класичних обчислень. Функції, які не є достатньо гладкими та регулярними, часто ігнорувались як "паталогічні" та такі, що не варті вивчення. В останні роки відношення до негладких функцій (або нерегулярних множин) змінилось, тому що нерегулярні функції (множини) забезпечують значно краще уявлення багатьох природних явищ, ніж ті, що дають об'єкти класичної геометрії. Прикладом можуть бути геометрія траєкторій частинок; ліній струму в гідродинаміці, хвиль, обводів корабельних корпусів та берегових ліній; ландшафтів, гір, островів, рік, льодовиків та відкладень; зерен у скелястих породах, металах та композитних матеріалах; геометрична структура кристалів, молекул хімічних речовин та інше. Фрактальна геометрія пов'язана з вивченням таких нерегулярних множин [12].

Історія розвитку ідей фрактальної геометрії тісно пов'язана з іменами таких відомих математиків, як Вейєрштрасс, Кантор, Пеано, Хаусдорф, Безікович, Кох, Серпінський та ін. Так, Вейєрштрасс уперше запровадив в обіг неперервну, але ніде недиференційовну функцію. Хаусдорф у 1919 р. запровадив поняття дробової розмірності множин та навів перші приклади таких множин. Серед них були канторівська множина, крива Коха та інші екзотичні об'єкти, на той час мало відомі за межею чистої математики.

В останні 20 років фрактали стали дуже популярними. Велику роль у цьому відіграла праця франко-американського математика Бенуа Мандельброта "Фрактальна геометрія природи" [64]. Мандельброт написав декілька книг про фрактальну геометрію, які зробили більш доступними його спеціальні праці та надихнули багатьох на застосування фрактальної геометрії в галузі власних досліджень, зокрема: "Фрактальні об'єкти: форма, випадок та розмірність" [18], "Фрактали: форма, випадок та розмірність" [19].

Що ж таке фрактал? У наш час нема однозначного визначення "фрактала". Якщо виходити з Лаверьє [16], то фрактал це геометрична фігура, в якій один і той самий фрагмент повторюється при кожному зменшенні масштабу. Мандельброт запровадив інше визначення фрактала. Фрактал — це така множина, яка має хаусдорфову (або фрактальну) розмірність, більшу за топологічну.

У першому визначенні слово "фрактал" — це від латинського "fractus", що значить ламаний, в іншому — від англійського "fractional" — дрібний.

В останні роки з'явилась велика кількість праць, що присвячені фракталам (див., наприклад, [27, 45, 49, 66, 87]), які отримані за допомогою комп'ютера. Ї ці фрактальні картини вражають. У зв'язку з цим, говорячи про фрактали, доволі часто використовують терміни: "комп'ютерне мистецтво", "художній дизайн", "естетичний хаос". У новій книзі Пайтгена та Ріхтера "Красота фрактальну природу ітераційних відображень та розв'язків диференціальних рівнянь.

Заслуговує на вивчення більш складне поняття об'ємних фракталів. Фрактальним поверхням присвячена праця Русса [27]. У книзі Кроновера [61], нещодавно виданою російською мовою, розглядається проблема хаотичності деяких фракталів (систем ітерованих функцій — СІФ). Основним об'єктом цієї праці є дискретні динамічні системи. В останні роки з'явився термін "мультифрактали" — це так звані неоднорідні фрактали, що визначаються не одним параметром — фрактальною розмірністю, а спектром таких розмірностей (див., наприклад, [64, 66]). Багато цікавих питань, пов'язаних із фракталами, обговорювалося на конференціях, праці яких вийшли за редакцією Фемілі і Ландау [13]; Пінна і Шелторпа [22] та ін.

## Розділ І\_\_\_\_\_ АВТОМОДЕЛЬНІСТЬ ТА ФРАКТАЛИ

Характерною ознакою всіх фрактальних кривих є степеневий закон збільшення довжини апроксимуючої ламаної при зменшенні довжини ланки ламаної (1). Для дослідження властивостей фрактальної кривої, які обумовлюють таку поведінку фракталів, застосовуються поняття автомодельності та самоподібності. Ці поняття насамперед пов'язані з теорією розмірностей величин, тому розглянемо основи цієї теорії (див., наприклад, [42, 78]) і приклади, де її застосування одразу приводить до пояснення фрактальної природи явищ.

## 1.1. АНАЛІЗ РОЗМІРНОСТЕЙ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Числове значення величини отримується шляхом вимірювання — прямого або непрямого порівняння досліджуваної величини з одиницями вимірювання. Якщо одиниця вимірювання змінюється, то змінюється і числове значення величини. Одиниці вимірювання поділяються на основні, які задаються за допомогою еталонів, та похідні, які отримуються з основних за допомогою означень — формул, що виражають певні закономірності між величинами та пов'язують похідні одиниці вимірювання з основними. Такі означення завжди вказують на спосіб вимірювання похідних величин. Сукупність основних одиниць вимірювання, яка достатня для опису деякого класу явищ, називається системою одиниць вимірювання.

Розмірністю величини називається функція, що визначає у скільки разів зміниться числове значення цієї величини при переході від однієї системи одиниць вимірювання до іншої.

Розглянемо це питання докладніше на прикладі фізичних величин.

Для позначення розмірності фізичної величини f прийнято використовувати квадратні дужки [f] = F. Символ F вказує рід

вимірюваної величини та кратність зміни одиниці вимірювання f при переході від однієї системи одиниць вимірювання до іншої. Величини, числове значення яких однакове в усіх системах одиниць вимірювання, називаються безрозмірними. Вважається, що розмірність безрозмірної фізичної величини дорівнює одиниці.

Основні одиниці вимірювання, а отже, і система одиниць вимірювання, вибираються довільно. Можна ввести додаткові еталони і цим збільшити число основних одиниць вимірювання. При цьому у функціональних співвідношеннях, що виражають фізичні закони, з'являться додаткові розмірні сталі. Наприклад, довжина  $\ell$  ( $[\ell] = L$ ) та час t ([t] = T) є основними одиницями вимірювання, а для вимірювання швидкості користуються формулою  $v = \ell/t$ , тобто для розмірності швидкості можна записати [v] = L/T. Одиниця вимірювання швидкості є похідною одиницею вимірювання. Можна вводити певний еталон для вимірювання швидкості  $v_0$  ( $[v_0] = V$ ) і розглядати одиницю вимірювання швидкості як основну. У цьому випадку у формулі, що пов'язує швидкість, довжину та час  $v = k\ell/t$ , з'являється додаткова константа k, розмірність якої [k] = VT/L.

Кількість основних одиниць вимірювання можна зменшувати, якщо розмірні множники у фізичних законах розглядати як абсолютні безрозмірні сталі. Наприклад, для вимірювання довжини та часу можна використовувати еталони та розглядати їх розмірності як основні. У цьому випадку для швидкості світла у вакуумі (або для будь-якої іншої величини з розмірністю швидкості) слушне співвідношення  $c = \ell/t$ . Якщо розглядати c як абсолютну безрозмірну сталу ([c] = 1), то у цьому випадку [ $\ell$ ] = [t], і для вимірювання довжин та часу можна користуватися тими ж одиницями вимірювання. Таким чином, вимірювання фізичних величин може бути зведене, зокрема, до вимірювання геометричних величин, тобто до вимірювання довжини.

Всі фізичні величини можна також розглядати як безрозмірні і запровадити єдину систему одиниць вимірювання. Така система дозволяє встановити одиниці вимірювання, які пов'язані з основними законами природи. Запровадження такої єдиної системи одиниць вимірювання рівнозначно повному усуненню поняття розмірності.

Зокрема, у різних розділах фізики (механіка, оптика, електрика тощо) використовуються системи одиниць вимірювання з різними основними одиницями.

Сукупність систем одиниць вимірювання, що розрізняються тільки значенням основних одиниць вимірювання, називається

класом систем одиниць вимірювання. Клас систем одиниць вимірювання позначається послідовним виписуванням символів величин одиниць вимірювання, які прийняті за основні (MLT, FLT, ...). Зокрема, система СЇ, для якої основними одиницями вимірювання є кілограм — M, метр — L та секунда — T, а також система СГС (грам — M, сантиметр — L, секунда — T) належать до одного класу MLT.

Розглянемо деякий клас систем одиниць вимірювання, наприклад MLT... та будь-яку фізичну величину f, яка залежить від основних одиниць вимірювання m,  $\ell$ , t. Очевидно, що розмірність цієї фізичної величини є функцією розмірностей основних одиниць вимірювання M, L, T у даному класі. Маючи на увазі рівноправність систем одиниць вимірювання у межах даного класу, для розмірності можна записати:

$$[f] = \varphi(M, L, T, ...).$$
 (1.1)

Для кожної величини *f* функція  $\varphi$  визначається з відповідних фізичних законів та співвідношень.

Для визначення загальних властивостей функції  $\varphi$  виберемо у класі *MLT*... три системи одиниць вимірювання: (0), (1) та (2). Система (*i*), де *i* = 1, 2, отримується з системи (0) зміною основних одиниць вимірювання у *M<sub>i</sub>*, *L<sub>i</sub>*, *T<sub>i</sub>*, ... разів відповідно. Слід зауважити, що клас систем одиниць вимірювання *MLT*... може бути довільним. Але якщо під літерами *M*, *L*, *T* розуміти позначення розмірностей маси, довжини та часу відповідно, тоді як приклад системи (0) можна використати систему Cİ, як приклад системи (1) — систему СГС, а як приклад системи (2) — британську систему одиниць вимірювання. (Будемо вважати, що у британській системі одиницею маси є 1 фунт = = 453,59 г, одиницею довжини — 1 дюйм = 2,54 см, а одиницею часу — 1 хвилина = 60 с.) Для наведеного прикладу: *M<sub>1</sub>* = 1000, *L<sub>1</sub>* = 100, *T<sub>1</sub>* = 1, *M<sub>2</sub>* = 1/0,45359 ≈ 2,2046, *L<sub>2</sub>* = 1/0,0254 ≈ 39,37, *T<sub>2</sub>* = 1/60 ≈ 0,01667.

Оскільки згідно з означенням розмірності фізичної величини при переході від системи (0) до системи (*i*) числове значення величини f зміниться у  $\varphi(M_i, L_i, T_i, ...)$  разів, то числові значення величини f у системах (1) та (2) розрізняються у  $\varphi(M_1, L_1, T_1, ...)/$  $\varphi(M_2, L_2, T_2, ...)$  разів. Проте при переході з системи (1) в систему (2) основні одиниці повинні змінюватись у  $M_1/M_2$ ,  $L_1/L_2$ ,  $T_1/T_2$ ... разів, а величина  $f - y \varphi(M_1/M_2, L_1/L_2, T_1/T_2, ...)$  разів. Таким чином, можна записати:

$$\frac{\varphi(M_1, L_1, T_1, ...)}{\varphi(M_2, L_2, T_2, ...)} = \varphi\left(\frac{M_1}{M_2}, \frac{L_1}{L_2}, \frac{T_1}{T_2}, ...\right).$$
(1.2)

Припускаючи, що розмірність — гладка функція, після диференціювання (1.2) за  $M_1$  і використання рівностей  $M_1 = M_2 = M$ ,  $L_1 = L_2 = L$ ,  $T_1 = T_2 = T$ , ... знаходимо

$$\frac{1}{\varphi(M,L,T,...)}\frac{\partial\varphi(M,L,T,...)}{\partial M} = \frac{\alpha}{M},$$
(1.3)

де  $\alpha = \frac{d\varphi(x,1,1,...)}{dx}\Big|_{x=1}$  — стала величина, що не залежить від M, L,

T, ... Інтегруючи (1.3) за M, отримуємо

$$\varphi(M, L, T, \ldots) = M^{\alpha} \varphi_1(L, T, \ldots),$$

де  $\varphi_1(L, T, ...)$  — певна функція змінних L, T, ...

Виконуючи такі самі дії для всіх основних одиниць вимірювання даної системи, отримуємо формулу розмірності у вигляді

$$\varphi = [f] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} \dots, \qquad (1.4)$$

де α, β, γ — деякі числа.

Зокрема, міра берегової лінії  $\lambda$  у формулі (1) також задовольняє формулу розмірності (1.4) і має вигляд  $[\lambda] = L^{D}$ , де фрактальна розмірність D не залежить від розмірності основних одиниць вимірювання і може бути навіть ірраціональним числом.

Таким чином, розмірність будь-якої фізичної величини завжди є степеневим одночленом розмірностей основних величин. Це твердження є наслідком принципу інваріантності: у межах даного класу всі системи одиниць вимірювання рівноправні.

Вважається, що фізичні величини мають незалежні розмірності, якщо розмірність жодної з цих величин не можна подати у вигляді добутку степенів розмірностей решти величин. Слід зазначити, що один і той же набір величин із незалежними розмірностями в одному класі систем одиниць вимірювання може мати залежні розмірності в іншому класі.

Як вже зазначалося, при зміні системи одиниць вимірювання змінюються числові значення фізичних величин. Проте зовсім не обов'язково, що при цьому будуть змінюватись усі фізичні величини. У межах даного класу завжди можна перейти до такої системи одиниць вимірювання, що будь-яка величина з набору одиниць вимірювання з незалежними розмірностями змінить своє числове значення у довільно задане число разів, у той час як числові значення інших величин з даного набору залишаться незмінними. Доведемо це твердження.

Нехай  $f_1, ..., f_k$  — фізичні величини, які у деякому класі одиниць вимірювання *MLT*... мають незалежні розмірності:

$$[f_1] = M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1} \dots, \quad \dots, \quad [f_k] = M^{\alpha_k} L^{\beta_k} T^{\gamma_k} \dots$$

Будемо шукати таку систему одиниць вимірювання (тобто такі числа *M*, *L*, *T*, ...), щоб виконувались співвідношення:

 $M^{\alpha_1}L^{\beta_1}T^{\gamma_1}...=A, \quad M^{\alpha_2}L^{\beta_2}T^{\gamma_2}...=1, \quad ..., \quad M^{\alpha_k}L^{\beta_k}T^{\gamma_k}...=1. \quad (1.5)$ 

У цьому випадку числове значення величини  $f_1$  зміниться у A разів, а значення величин  $f_2, ..., f_k$  залишаться незмінними.

Логарифмуючи (1.5), отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно величин ln*M*, ln*L*, ln*T*, ... :

$$\alpha_1 \ln M + \beta_1 \ln L + \gamma_1 \ln T + \ldots = \ln A,$$

$$\alpha_2 \ln M + \beta_2 \ln L + \gamma_2 \ln T + \ldots = 0,$$

 $\alpha_k \ln M + \beta_k \ln L + \gamma_k \ln T + \ldots = 0.$ 

Оскільки розмірності величин  $f_1, ..., f_k$  є незалежними, то кількість невідомих у отриманій системі більша або дорівнює кількості рівнянь. Якщо кількість невідомих більша за кількість рівнянь, то система є сумісною. У випадку, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, детермінант отриманої системи відрізняється від нуля (через лінійну незалежність розмірностей величин  $f_1, ..., f_k$ ). У цьому випадку система може бути розв'язана однозначно. Знайдені розв'язки системи рівнянь і дозволяють побудувати необхідну систему одиниць вимірювання у вибраному класі.

Певні теоретичні або експериментальні закономірності можна записати у вигляді формули — деякої функціональної залежності між величиною f, яка визначається, та *n*-визначальними параметрами  $f_1, ..., f_k$ . Очевидно, така функціональна залежність (якщо вона дійсно відображає певну фізичну закономірність) повинна зберігатися при довільному виборі системи одиниць вимірювання у межах даного класу. Розглянемо, якого вигляду набудуть формули, що відображають функціональні закономірності. Нехай існує певна функціональна закономірність:

$$f = f(f_1, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n), \qquad (1.6)$$

де  $f_1, ..., f_k$  — визначальні параметри з незалежними розмірностями;  $f_{k+1}, ..., f_n$  — визначальні параметри з залежними розмірностями, такі, що:

$$[f_{k+1}] = [f_1]^{p_{k+1}} \cdot \dots \cdot [f_k]^{r_{k+1}}$$
  
...  
$$[f_n] = [f_1]^{p_n} \cdot \dots \cdot [f_k]^{r_n}.$$
 (1.7)

Доведемо, що для шуканої фізичної величини можна записати

$$[f] = [f_1]^p \cdot \dots \cdot [f_k]^r . \tag{1.8}$$

Якби формула (1.8) не виконувалася, то величини  $f, f_1, ..., f_k$ мали б незалежну розмірність. А це означало б, згідно з доведеним вище твердженням, що можна вибрати таку систему одиниць вимірювання, де величина f змінить своє числове значення у довільне число разів, а значення величин  $f_1, ..., f_k$  залишаться при цьому незмінними. Тоді завдяки співвідношенню (1.7) залишаться незмінними також величини  $f_{k+1}, ..., f_n$ . У свою чергу, це означало б, що вираз (1.6) не є інваріантним відносно вибору системи одиниць вимірювання, що суперечить зробленим вище припущенням. Тобто завжди можна підібрати такі числа p, ..., r, щоб справджувалося співвідношення (1.8).

Запровадимо такі безрозмірні величини:

$$\Pi = \frac{f}{f_1^p \dots f_k^r}, \ \Pi_1 = \frac{f_{k+1}}{f_1^{p_{k+1}} \dots f_k^{r_{k+1}}}, \ \dots, \ \Pi_{n-k} = \frac{f_n}{f_1^{p_n} \dots f_k^{r_n}}.$$
 (1.9)

Очевидно, що їх числові значення не залежать від вибору системи одиниць вимірювання у межах даного класу. З урахуванням (1.9) залежність (1.6) набуває вигляду

$$\Pi = F(f_1, ..., f_k, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}),$$

дe

$$F(f_1, ..., f_k, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}) = \frac{f(f_1, ..., f_k, \Pi_1 f_1^{p_{k+1}} \dots f_k^{r_{k+1}}, ..., \Pi_{n-k} f_1^{p_n} \dots f_k^{r_n})}{f_1^p \dots f_k^r}.$$

Змінюючи систему одиниць вимірювання, можна довільним чином змінювати значення будь-якої з величин  $f_1, ..., f_k$ , при цьо-

му всі інші аргументи функції та саме значення функції F залишаються незмінними. Це можливе тільки у тому випадку, коли функція F не залежить від величин  $f_1, ..., f_k$ , а є функцією тільки аргументів  $\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ . Тобто

$$F(f_1, ..., f_k, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}) = \Phi(\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}).$$

Таким чином, будь-яка функціональна закономірність вигляду (1.6) може бути подана так:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}). \tag{1.10}$$

Вираз (1.10) — це математичний запис П-теореми, яку можна сформулювати у такий спосіб: будь-яка функціональна залежність n + 1 розмірних фізичних величин, k з яких мають незалежні розмірності, може бути зведена до залежності n + 1 - k їх безрозмірних комбінацій.

Потрібно зробити два зауваження.

По-перше, кількість шуканих параметрів із незалежними розмірностями в (1.6) можна змінити шляхом зміни набору основних одиниць вимірювання у класі (зміни класу систем одиниць вимірювання). У такому випадку зміниться і кількість аргументів у обезрозміреній функціональній залежності (1.10). Чим менше у шуканої величини параметрів із залежними розмірностями, тим більш обмеженою є обезрозмірена функціональна залежність. Зокрема, якщо всі визначальні параметри мають незалежні розмірності, то функціональну залежність можна цілком визначити з точністю до сталого множника. Проте збільшення кількості основних одиниць вимірювання буде корисним тільки тоді, коли величини, що виникають при запровадженні нових основних одиниць вимірювання, не будуть суттєвими.

По-друге, знайти явний вигляд залежності шуканої величини від параметрів, що її визначають, можливо не для кожної функціональної закономірності. Проте при n - k = 1 явний вигляд залежності можна знайти у загальному випадку.

Аналіз розмірностей широко використовується при обробці експериментальних результатів і при попередньому аналізі явищ. У наступних параграфах буде наведено приклади застосування аналізу розмірностей (для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, для задач теорії турбулентності за Колмогоровим, теорії полімерів, математичної фізики, теорії рідини тощо).

Такі поняття як фізична подібність, автомодельність та проміжна асимптотика, що будуть розглянуті у наступному розділі, теж ґрунтуються на аналізі розмірностей.

## 1.2. ГЕОМЕТРИЧНА І ФІЗИЧНА ПОДІБНІСТЬ. САМОПОДІБНІСТЬ І САМОАФІННІСТЬ. РОЗМІРНІСТЬ ПОДІБНОСТІ

Геометрична подібність — поняття, яке характеризує наявність у геометричних фігур однакової форми незалежно від їх розмірів. Дві фігури називаються подібними, якщо між їх точками можна встановити взаємно однозначну відповідність, для якої відношення відстаней між будь-якими парами відповідних точок дорівнює одній і тій самій сталій, що називається коефіцієнтом подібності. Геометричне перетворення, при якому всі фігури переходять у подібні до них з тим самим коефіцієнтом подібності, називається перетворенням подібності, або гомотетією, або скейлінгом.

Перетворення подібності є одним із випадків афінного перетворення — взаємно однозначного точкового відображення площини або простору на себе, при якому трьом точкам, що лежать на одній прямій, відповідають три точки, що також лежать на одній прямій. Афінне перетворення площини (простору) не тільки переводить перетинні прямі у перетинні, паралельні прямі у паралельні, а й зберігає взаємне розміщення двох прямих (перетинних, паралельних, перехресних тощо). При афінному перетворенні відношення напрямлених відрізків, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню їх образів. Зберігається також відношення площин двох квадровних фігур на евклідовій площині і відношення об'ємів двох кубовних фігур у евклідовому просторі. Афінна геометрія — це те, що залишається від евклідової геометрії, якщо з неї вилучити будь-яку можливість вимірювання довжин, площин, кутів і т. ін.

Діагональне афінне перетворення (перетворення, купв 11. п. Діагональне афінне перетворення (перетворення, у якому виключена можливість обертання об'єктів) у *E*-вимірному афінному просторі з координатами  $x_i$  визначається заданням нерухомої точки з координатами  $a_i$  (0 < i < E + 1) і, взагалі кажучи, різних коефіцієнтів перетворення  $r_i$  за формулою

$$r_i \rightarrow a_i + r_i(x_i - a_i)$$
.

Афінне перетворення стискає або розтягує фігуру в різних напрямах по-різному, у той час як перетворення подібності стискає або розтягує фігуру вздовж усіх напрямів з однаковим масштабним фактором (всі коефіцієнти  $r_i$  дорівнюють один одному). Коефіцієнти  $r_i$  не обов'язково мають бути додатними, але повинні не дорівнювати один одному, інакше афінне перетворення

переродиться на перетворення подібності. Обернені величини, що називаються базисами,  $1/|r_m| = b_m$ , у найпростіших випадках, побудованих за допомогою рекурсії, є цілі числа. Приклади афінних перетворень: ізометричне перетворення (перетворення, при якому зберігається відстань між двома будь-якими точками), рівномірне стиснення площини до прямої, а також вже згадуване перетворення подібності. Так, кожне афінне перетворення площини є добутком ізометричного перетворення та двох рівномірних стисків до двох взаємно перпендикулярних прямих.

Афінні перетворення утворюють групу. Однією із підгруп цієї групи є перетворення подібності. В афінній геометрії нема поняття довжини, тому не існує таких геометричних понять, як "відстань", "квадрат", "коло". У цьому і є принципова різниця між афінним і евклідовим просторами.

Фізична подібність — узагальнене поняття геометричної подібності. Фізичні явища, що описуються закономірностями вигляду (1.6), називаються подібними, якщо вони розрізняються лише кількісними значеннями шуканих параметрів, а відповідні їм безрозмірні величини П (1.9), що називаються параметрами подібності, збігаються. Фізична подібність явищ дозволяє переносити результати вимірювань у модельних системах на системи, реальні вимірювання в яких неможливо провести.

Числові значення параметрів, що визначають два подібні фізичні явища, можна розглядати як числові значення параметрів, що визначають одне й те саме фізичне явище, виражені у двох різних системах одиниць вимірювання. Оскільки при переході від однієї системи одиниць вимірювання до іншої масштаби перетворення числових значень основних величин різні, то такий перехід можна розглядати як афінне перетворення у просторі основних одиниць вимірювання, а фізично подібні системи можна розглядати як афінно подібні.

Разом із поняттям подібності визначимо властивість самоподібності, яка є наслідком інваріантності об'єктів залежно від певних перетворень. Зокрема, прямій лінії (нескінченна множина точок) притаманна трансляційна симетрія — лінія інваріантна (переходить сама в себе) відносно паралельного перенесення уздовж цієї прямої і довільної зміни масштабу координат (скейлінгу). Так само і площина інваріантна відносно паралельних перенесень у будь-якому напрямі, що лежить у цій площині, і скейлінгу. Тобто, прямій, площині, як і тривимірному простору, притаманна властивість самоподібності.

Обмежені множини точок, зокрема відрізок прямої або прямокутник на площині, не мають трансляційної симетрії. Але застосувавши скейлінг, наприклад, до прямокутника, тобто змінивши довжини його сторін у r < 1 раз, одержимо його зменшену копію. При цьому нова множина точок 3, що утворюють зменшений прямокутник, є підмножиною множини точок 3, що утворюють шуканий прямокутник. Застосовуючи паралельне перенесення, можна підібрати таке значення параметра r, при якому шуканий прямокутник буде повністю покритий своїми N зменшеними неперетинними копіями. Тобто прямокутник є самоподібним з коефіцієнтом подібності г. Узагальнюючи, можна стверджувати, що множина Э є самоподібною з коефіцієнтом подібності г. Наприклад, для відрізка прямої одиничної довжини r(N) = 1/N, де N — будь-яке ціле число. Для прямокутника з одиничними довжинами сторін  $r(N) = (1/N)^{1/2}$ , для прямокутного паралелепіпеда з одиничними довжинами сторін r(N) =  $= (1/N)^{1/3}$ .

У загальному випадку масштабне (скейлінгове) перетворення задовольняє таку формулу:

$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D_s}}$$

де параметр

$$D_S = -\frac{\ln N}{\ln r(N)} \tag{1.11}$$

називається розмірністю подібності (самоподібності). Для прямих, площин і кубів розмірності подібності дорівнюють відповідно 1, 2 і 3.

За аналогією з визначенням самоподібних об'єктів вводиться поняття самоафінних об'єктів. Множина  $\Im$  є самоафінною відносно послідовності N діагональних афінних перетворень  $a_n$ , якщо виконується умова  $\Im = \bigcup \alpha_n \Im$ , при цьому  $\alpha_n \Im \cap \alpha_m \Im = 0$  при  $n \neq m$ . Отже, вихідна множина  $\Im$  розбивається на N неперетинних частин, кожна з яких отримується з цілісної вихідної за допомогою одного з афінних перетворень послідовності.

Для самоафінних множин неможливо знайти розмірність подібності.

У точному розумінні лише правильним геометричним об'єктам властиві самоподібність і самоафінність, які розглянуті у цьому розділі. Реальним природним об'єктам (системам), зокрема фізичним об'єктам, властиві статистична самоафінність та статистична самоподібність. Крім того, на відміну від правильних геометричних об'єктів, реальні фізичні об'єкти, як правило, характеризуються щонайменше двома масштабними величинами: мінімальною довжиною *a* (наприклад, стала кристалічної ґратки або розмір мінімального структурного елемента) і максимальною довжиною *L* (наприклад, кореляційна довжина або розміри зразка). На відстанях  $\ell$ , таких, де  $a << \ell < L$ , існує область проміжної асимптотики, яка саме і характеризується масштабною інваріантністю (самоподібністю). Характеристикою такої самоподібності і є розмірність подібності (1.11). На відстанях  $\ell >> L$  система є однорідною, і її можна подати як складену з блоків з характерними розмірами *L*. При цьому властивості блоків характеризуються їх поведінкою на проміжній асимптотиці.

Узагальнене означення величини  $D_s$  для самоафінних множин та приклади застосування самоафінних фракталів буде наведено у параграфі 3.6 і розділі 4. Серед таких прикладів — топографічні вертикальні профілі, випадкове блукання, часові ряди (зокрема, залежність магнітного поля Землі від часу в кожній точці земної поверхні), гідрометрія, траєкторія вінерівського процесу броунівського руху.

## 1.3. ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІЗУ РОЗМІРНОСТЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Аналіз розмірностей дозволяє отримувати частинні розв'язки задач математичної фізики (початкові, крайові або змішані задачі для рівнянь або систем рівнянь у частинних похідних). Ці розв'язки виражаються через розв'язки крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо це на прикладі одновимірного поширення теплових хвиль, що збуджуються у газі або твердому тілі під час миттєвого виділення деякої порції тепла на обмеженій ділянці. Інші приклади застосування аналізу розмірностей до задач термо- і газодинаміки будуть наведені у параграфі 7.1.

Будемо вважати, що залежністю коефіцієнта теплопровідності µ та теплоємності речовини с (питома теплоємність речовини на одиницю довжини) від температури *T* можна знехтувати. Запишемо закон збереження енергії у вигляді

$$c\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0,$$

де  $q = -\mu$  grad T — потік тепла, t — час. Після підстановки знаходимо

div 
$$q = -\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} T) = -\mu \Delta(T)$$
,

де  $\Delta$  — оператор Лапласа для одновимірного випадку.

Відповідно, закон збереження енергії набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \kappa = \mu/c.$$
 (1.12)

Знайдемо розв'язок цього рівняння T(x, t) за початкової умови

$$T(x, 0) = 0, x \neq 0, c \int_{-x_0}^{x_0} T(x, 0) dx = E,$$

де  $x_0$  — як завгодно мале число, що задовольняє умову  $T(x, 0) = Q \,\delta(x)(\delta(x) -$ дельта-функція Дірака, Q = E/c), і умову на нескінченності  $T(\pm\infty, t) = 0, t > 0$ . Це відповідає миттєвому виділенню деякої скінченної кількості тепла E у точці x = 0 і початковій температурі, що дорівнює нулю всюди, крім цієї точки.

Для знаходження температури T шуканими параметрами будуть змінні x і t та сталі величини  $\kappa$  і Q, які входять до рівняння (1.12) і початкових умов. Тобто  $T = f(x, t, \kappa, Q)$ .

Застосуємо теорію розмірностей. Розмірності шуканих параметрів такі: [x] = L, [t] = T,  $[\kappa] = L^2 T^{-1}$ ,  $[Q] = \Theta L$ , де  $\Theta$  — символ розмірності температури. Відповідно кількість шуканих параметрів — 4, параметрів з незалежними розмірностями — 3. Враховуючи П-теорему (1.10), знаходимо

$$\Pi = \frac{T\sqrt{\kappa t}}{Q}, \quad \Pi_1 = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}} = \xi, \quad \Pi = \Phi(\Pi_1), \quad T = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \Phi(\xi). \quad (1.13)$$

Обчислюючи за допомогою останнього виразу необхідні похідні від T(x, t) і підставляючи їх до рівняння теплопровідності (1.12), отримуємо для визначення функції  $\Phi(\xi)$  звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{2}\Phi(\xi) = 0$$
(1.14)

із такими умовами:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) d\xi = 1$ ,  $\Phi(\pm \infty) = 0$ .

До цих умов необхідно додати вимогу неперервності функції  $\Phi(\xi)$  та її похідної  $d\Phi(\xi)/d\xi$ , що виходить з умов неперервності температури *T* при t > 0 (пропорційна  $\Phi$ ) та неперервності потоку тепла  $q \sim d\Phi/d\xi$ .

Розв'язок рівняння (1.14) з урахуванням вказаних вище умов має вигляд

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\}.$$

Остаточно для розподілу температури знаходимо

$$T(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\kappa t}\right\}.$$

Цікаво зазначити, що припускаючи незалежність коефіцієнта теплопровідності від температури, спостерігаємо нескінченну швидкість поширення тепла, а саме, зона збурення температури при t > 0 є необмеженою.

## 1.4. АВТОМОДЕЛЬНІСТЬ. ПРОМІЖНА АСИМПТОТИКА

Автомодельне явище — це явище, що залишається фізично подібним самому собі при зміні одного або декількох незалежних параметрів, які визначають це явище. Зокрема, наведене вище явище миттєвого теплового джерела має властивість автомодельності, а як незалежний параметр виступає час, тобто ми маємо автомодельне явище, що розгортається у часі. Згідно з означенням, просторовий розподіл характеристик цього явища в різні моменти часу походить один із одного при перетворенні подібності.

Якщо вибирати залежні від часу t масштаби  $x'_{s}(t)$  і  $T_{s}(t)$  (для шуканої змінної x і характеристики явища T відповідно), то розподіл характеристики явища T в різні моменти часу визначається так:

$$T(x, t) = T_{\mathcal{S}}(t) \Phi(x/x_{\mathcal{S}}(t)).$$

Таким чином, розподіл шуканої величини T(x, t) в різні моменти часу в автомодельних змінних  $\zeta = T/T_s(t)$ ,  $\zeta = x/x_s(t)$  можна задати однією кривою  $\zeta = \Phi(\xi)$ . Для задачі про миттєве теплове джерело маємо

$$x_{s}(t) = \sqrt{\kappa t}$$
,  $T_{s}(t) = Q/\sqrt{\kappa t}$ .

Автомодельні розв'язки зустрічаються у багатьох задачах математичної фізики. Їх пошук дозволяє звести задачу математичної фізики до крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, що спрощує її розв'язок.

Проте слід зазначити, що автомодельні розв'язки корисні насамперед як проміжні асимптотичні розв'язки широкого кола задач. Тобто такі розв'язки є ізольованими точними розв'язками частинних задач. Автомодельні розв'язки характеризують поведінку системи на тій ділянці, де вони вже не залежать від деталей початкових або граничних умов, проте система ще далека від кінцевого стану.

Проміжно-асимптотичний характер автомодельних розв'язків можна простежити для розглянутого раніше рівняння теплопровідності (1.12) в одновимірному випадку на прикладі дещо ускладненої задачі про миттєве теплове джерело.

Нехай миттєве виділення енергії відбувається не у точці, а на деякій ділянці скінченного розміру d (початкова температура  $T_0 \neq 0$ ). У цьому випадку до шуканих параметрів задачі необхідно додати d і  $T_0$ . Це не змінить кількості шуканих параметрів задачі з незалежними розмірностями, що згідно з П-теоремою приведе до появи у функціональній залежності (1.16) двох нових безрозмірних параметрів (крім  $\Pi_1$ ):  $\Pi_2 = d/x_S(t)$  і  $\Pi_2 = T_0/T_S(t)$ .

Очевидно, що вплив скінченності розмірів початкової ділянки тепловиділення на розв'язок T(x, t) є суттєвим лише на відстанях порядку d. Цей вплив зникає на відстанях  $x >> x_1 = d$ . Такі відстані хвиля проходить за час  $t >> d2/\kappa$ . За цих умов  $\Pi_2 << 1$ , і залежністю розв'язку від цього параметра подібності, а природно, і від відповідного йому розмірного параметра можна знехтувати.

Разом з цим, за умов достатньо значного тепловиділення та низької теплопровідності (Q — велике) у початковий проміжок часу температура на ділянці, охопленій тепловою хвилею, на багато більша за початкову температуру  $T_0$ . Враховуючи, що температура поблизу джерела тепла має порядок  $Q/\sqrt{\kappa t}$ , отримуємо, якщо час  $t << t_2 = Q^2/\kappa T_0^2$ , то параметром  $\Pi_3 << 1$  і впливом початкової температури на процес поширення теплових хвиль можна знехтувати. Подібна ситуація зберігається аж до відстаней  $x << x_2 = Q/T_0$ . Для потужного та сконцентрованого джерела тепловиділення (велике Q і маленьке d) просторові масштаби далеко рознесені один від одного, тобто  $x_1 \ll x_2$ . Така сама ситуація спостерігається і для часових масштабів ( $t_1 \ll t_2$ ). Отриманий автомодельний розв'язок добре описує досліджуване явище для достатньо великих проміжків часу та відстаней, щоб зник вплив скінченності розміру ділянки початкового тепловиділення, і разом з тим достатньо малих, щоб можна було знехтувати відмінністю початкової температури від нуля. У зв'язку з цим говорять, що автомодельний розв'язок являє собою проміжну асимптотику досліджуваного явища.

Під проміжною асимптотикою розуміється наступне. Нехай у задачі є дві характерні сталі величини — розмірності деякої незалежної змінної  $f: F_1$  і  $F_2$ . Проміжною асимптотикою називається поведінка розв'язку при  $f/F_1 \to \infty$ , але  $f/F_2 \to \infty$ . Підкреслимо ще раз, що розглянуті вище автомодельні роз-

Підкреслимо ще раз, що розглянуті вище автомодельні розв'язки завжди є розв'язками вироджених задач, тобто таких задач, параметри розмірності незалежних змінних яких приймають нульові або нескінченні значення. Тому, як правило, автомодельні розв'язки відповідають сингулярним початковим або граничним умовам, і можна казати, що автомодельні розв'язки це проміжні асимптотики розв'язків невироджених задач.

## 1.5. АВТОМОДЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДРУГОГО РОДУ

Викладена у попередньому параграфі методика знаходження автомодельних розв'язків пов'язана з аналізом розмірностей. Застосовуючи такий аналіз до виродженої задачі, точним розв'язком якої є та чи інша автомодельність, можна отримати вираз для автомодельних змінних. Після одержання такого розв'язку можна спробувати знайти клас невироджених задач, для яких розглянутий автомодельний розв'язок є проміжною асимптотикою. Такі автомодельні розв'язки називаються автомодельними розв'язками першого роду.

Проте побудова автомодельних розв'язків не вичерпується аналізом розмірностей. Існують задачі, для яких хоч і спостерігається автомодельна проміжна асимптотика, проте цю асимптотику не можна отримати з вихідної постановки задачі шляхом аналізу розмірностей. Вираз для автомодельних змінних у цьому випадку визначається з розв'язання задачі на власні значення. У цьому випадку говорять про автомодельні розв'язки другого роду.

Для ілюстрації автомодельних розв'язків другого роду модифікуємо задачу про миттєве теплове джерело. Припустимо, що теплоємність оточення дорівнює *c*, якщо оточення нагрівається, і  $c_1$  — якщо охолоджується. Теплопровідність оточення  $\lambda$  не залежить від напряму зміни температури, а це означає, що умови неперервності теплового потоку потребують неперервності похідної  $\partial T(x, t)/\partial x$ . За такої постановки класичне рівняння теплопровідності замінюється на рівняння з розривним коефіцієнтом температуропровідності  $\kappa = \lambda/c$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa(\partial T/\partial t) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \kappa(\partial T/\partial t) = \begin{cases} \kappa, \ \partial T/\partial t < 0, \\ \kappa_1, \ \partial T/\partial t \ge 0. \end{cases}$$
(1.15)

Будемо шукати неперервний розв'язок цього рівняння з неперервними похідними за обома незалежними змінними, що задовольняє умови  $T(\pm\infty, t) = 0$  (t > 0),  $T(x, 0) = Q \delta(x)$ .

Застосуємо аналіз розмірностей до поставленої задачі. Перелік шуканих параметрів необхідно доповнити безрозмірним сталим параметром  $\varepsilon = \kappa_1/\kappa$ , а шуканий розв'язок є

$$T(x, t) = T_s(t) \Phi(\xi, \varepsilon), \qquad (1.16)$$

де функція  $\Phi(\xi, \varepsilon)$  — неперервна з неперервною похідною за  $\xi$  і парна за  $\xi$ . Для знаходження координати  $x_0(t)$  межі, що відділяє ділянку розігріву від ділянки охолодження, необхідно розв'язати рівняння  $\partial T(x, t)/\partial t = 0$ . Враховуючи вираз для розв'язку (1.16), знаходимо  $x_0(t) = \xi_0 \sqrt{\kappa t}$ , де  $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon)$  — розв'язок рівняння

$$\Phi(\xi, \varepsilon) + \xi \frac{d\Phi(\xi, \varepsilon)}{d\xi} = 0.$$
(1.17)

Підставляючи (1.16) у (1.15), одержуємо для Ф(ξ, є) звичайне диференціальне рівняння з розривним коефіцієнтом при старшій змінній:

$$\left\{\chi\left(\left|\xi\right|-\xi_{0}
ight)+\epsilon\chi\left(\xi_{0}-\left|\xi
ight|
ight)
ight\}rac{d^{2}\Phi}{d\xi^{2}}+rac{1}{2}rac{d}{d\xi}\left(\xi\Phi
ight)=0,$$

де  $\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \ge 0; \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$  — одинична функція Хевісайда. При  $\xi = \xi_0$  згідно з (1.17) маємо

$$\frac{d}{d\xi} \big[ \xi \Phi(\xi, \, \varepsilon) \big] = 0 \, .$$

28

Інтегруючи отримані рівняння, знаходимо

$$\varepsilon \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi \Phi = C_1, \quad |\xi| \le \xi_0,$$
$$\frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi \Phi = C_2, \quad \xi_0 \le |\xi|.$$

При  $\xi = 0$  величина  $d\Phi(\xi)/d\xi = 0$ , оскільки у точці x = 0 при t > 0 відсутній приплив тепла і розв'язок симетричний. При  $x \to \infty$  величина  $\xi \Phi$  прямує до нуля, оскільки

 $\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{d}{d\xi} (\xi \Phi) \Longrightarrow_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial t} d\xi \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} (\xi \Phi) d\xi,$  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial t} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\kappa t}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} T dx = \frac{1}{\sqrt{\kappa t}} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0,$ 

 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} (\xi \Phi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\xi \Phi) = \xi \Phi \Big|_{\xi \to +\infty} = -\xi \Phi \Big|_{\xi \to -\infty}, \ \xi \Phi(\xi) \xrightarrow{\xi \to \pm\infty} 0.$ 

Таким чином,  $C_1 = C_2 = 0$ . Повторно інтегруючи, отримуємо

$$\begin{split} \Phi(\xi, \varepsilon) &= C_3 \exp\{-\xi^2/4\varepsilon\}, \quad |\xi| \le \xi_0, \\ \Phi(\xi, \varepsilon) &= C_4 \exp\{-\xi^2/4\}, \quad \xi_0 \le |\xi|. \end{split}$$

Враховуючи неперервність  $\Phi(\xi)$  і  $d\Phi(\xi)/d\xi$  при  $\xi = \xi_0$ , одержуємо для  $C_3$ ,  $C_4$  систему алгебраїчних рівнянь:

$$C_3 \exp\{-\xi^2/4\epsilon\} = C_4 \exp\{-\xi^2/4\},$$
$$C_3 \exp\{-\xi^2/4\epsilon\} = \epsilon C_4 \exp\{-\xi^2/4\}.$$

Очевидно, що при ε ≠ 1 ця система не має нетривіальних розв'язків. Тривіальні розв'язки не задовольняють початкові умови.

Тим самим доведено, що у розглянутій задачі відсутні автомодельні розв'язки першого роду, які отримуються на основі аналізу розмірностей.

Однак проведений числовий експеримент показав, що розв'язання задачі Коші для модифікованої задачі про миттєве теплове джерело швидко виходить на автомодельну проміжну асимптотику:

$$T(x,t) = \left[ A/(\kappa t)^{(1+\alpha)/2} \right] \Phi(x/\sqrt{\kappa t},\varepsilon) , \qquad (1.18)$$

де показник  $\alpha$  залежить тільки від  $\varepsilon$ , а стала A — від  $\varepsilon$  і початкових умов.

Покажемо, як у цій задачі могла виникнути автомодельна проміжна асимптотика, вигляд якої відрізняється від передбачуваних аналізом розмірностей.

Раніше було встановлено, що автомодельні розв'язки вироджених завдань є асимптотичною границею більш широкого класу невироджених завдань. Відповідно до цього для зняття виродження припустимо, що відділення тепла відбувається не у точці, а в якійсь обмеженій області простору розміром *d*. У цьому випадку виникає новий розмірний шуканий параметр, який пошкоджує автомодельність. Аналіз розмірностей з використанням **П**-теореми у цьому випадку призводить до такого результату щодо розподілу температури:

$$T(x,t) = (Q/\sqrt{\kappa t})\Psi(\xi,\eta,\varepsilon), \eta = d/\sqrt{kt}.$$
(1.19)

У класичній постановці ( $\varepsilon = 1$ ) асимптотика розв'язку задачі на великих проміжках часу ( $t \to \infty \Rightarrow \eta \to 0$ ) еквівалентна розв'язку задачі про миттєве точкове джерело тепла ( $d = 0 \Rightarrow \eta = 0$ ). На відміну від цього, розв'язку модифікованої задачі із сингулярними початковими умовами не існує, оскільки не існує кінцевого відмінного від нуля краю функції  $\Phi(\xi, \eta, \varepsilon)$  при  $\eta \to 0$ . Пояснення полягає у тому, що при малих  $\eta$  функція  $\Phi(\xi, \eta, \varepsilon)$ поводить себе таким чином:

$$\Phi(\xi, \eta, \varepsilon) = \eta^{\alpha} \varphi(\xi, \varepsilon), \qquad (1.20)$$

де  $\varphi(\xi, \varepsilon)$  — скінченна відмінна від нуля функція,  $\alpha$  — деяка стала, залежна від  $\varepsilon$ , яка не дорівнює нулю при  $\varepsilon \neq 1$  і перетворюється в нуль при  $\varepsilon = 1$ . Підставляючи (1.20) в (1.19), отримуємо асимптотичну форму розв'язку завдання, справедливу для великих проміжків часу ( $t \rightarrow 0$ ):

$$T(x, t) = (Qd^{\alpha}/(\sqrt{\kappa t})^{(1+\alpha)})\varphi(\xi, \varepsilon).$$

Якщо спробувати перейти до границі при  $\eta \to 0$ , тоді залежно від знака  $\alpha$  у правій частині розв'язку отримаємо або нуль, або нескінченність.

Прямування  $\eta$  до нуля при скінченному  $\xi$  може бути забезпечено у спосіб граничного переходу  $d \to 0$  при незмінних *x* і *t*.

У класичному випадку ( $\varepsilon = 1$ ) обидва підходи рівнозначні і приводять до задачі про миттєве точкове джерело. У випадку модифікованої задачі ( $\varepsilon \neq 1$ ) для того, щоб при  $\alpha \neq 0$  отримати за допомогою граничного переходу  $d \rightarrow 0$  і незмінних *x* і *t* такий самий асимптотичний розв'язок, який маємо при скінченному *d* і  $t \rightarrow \infty$ , необхідно спрямувати водночас і *Q* до нуля або нескінченності (залежно від знака  $\alpha$ ) так, щоб залишалась скінченною величина  $Qd^{\alpha}$ . Отриманий при такому граничному переході автомодельний розв'язок може бути поданий у вигляді (1.18) з  $A = \beta \lim Qd^{\alpha}$ , де  $\beta$  — безрозмірна стала, яка залежить від нормування функції  $\varphi(\xi, \varepsilon)$ . Завжди функцію  $\varphi(\xi, \varepsilon)$  нормують так, щоб  $\varphi(0, \varepsilon) = 1$ .

Слід також зазначити, що для знайденого автомодельного розв'язку величина

 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} T(x,t) \ dx$ 

обмежена, відмінна від нуля і зберігається у часі, якщо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{\alpha} \varphi(\xi, \varepsilon) \ d\xi$$

є обмеженим і відрізняється від нуля. Таким чином, знайдена проміжна асимптотика, як і у випадку класичної задачі, відповідає сингулярним початковим даним, однак ця сингулярність вже не є класичною δ-функцією.

Підставляючи розв'язок (1.18) в основне рівняння (1.15), отримуємо для  $\varphi(\xi, \varepsilon)$  звичайне диференціальне рівняння з розривними коефіцієнтами при старшій похідній:

$$\left\{ \chi \left( \left| \xi \right| - \xi_0 \right) + \varepsilon \chi \left( \xi_0 - \left| \xi \right| \right) \right\} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{1 + \alpha}{2} \varphi = 0, \quad (1.21)$$

де точка ξ<sub>0</sub> є розв'язком рівняння

$$\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + (1+\alpha) \varphi = 0.$$
 (1.22)

Як і раніше,  $\varphi(\xi, \varepsilon)$  і її перша похідна за  $\xi$  повинні бути неперервними скрізь, у тому числі і при  $\xi = \xi_0$ . Крім того, у зв'язку з відсутністю припливу тепла в точці x = 0 при t > 0 справедлива умова  $d\varphi(0, \varepsilon)/d\xi = 0$ . Неважко помітити, що в рівняннях (1.21), (1.22) величина  $\alpha \in$  параметром. При довільному  $\alpha$  ці рівняння не мають розв'язків, що задовольняють описані вище граничні і початкові умови. Однак для кожного значення параметра є можна знайти значення  $\alpha$ , при якому потрібний розв'язок рівняння (1.21) існує. Таким чином, для знаходження  $\varphi(\xi, \varepsilon)$  і  $\alpha(\varepsilon)$  маємо задачу на власні значення. Така задача виявляється нелінійною, оскільки значення координати  $\xi_0$  невідоме і його треба знайти через розв'язок рівняння (1.22). Стала A (нормування розв'язку) у такій постановці задачі залишається невизначеною.

## 1.6. КЛАСИФІКАЦІЯ АВТОМОДЕЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ. ПОВНА І НЕПОВНА АВТОМОДЕЛЬНІСТЬ

Розглянута вище задача про миттєве точкове теплове джерело дозволяє впровадити формальну класифікацію автомодельних залежностей. А саме, нехай деяка фізична закономірність вигляду (1.6) за допомогою **П**-теореми зводиться до вигляду (1.10) так, що розмірному шуканому параметру  $a_{k+1}$  відповідає безрозмірний параметр  $\Pi_i$ .

Якщо параметр  $\Pi_i$  виявляється не надто великим і не дуже малим, то його впливом можна знехтувати, якщо при  $\Pi_i \rightarrow 0$  або  $\Pi_i \rightarrow \infty$  функція Ф досить швидко прямує до якогось скінченного значення. У цьому випадку функцію Ф можна замінити функцією з меншим числом аргументів, і співвідношення (1.10) набуде такого вигляду:

$$\Pi = \Phi_0(\Pi_1, ..., \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, ..., \Pi_{n-k}),$$

де  $\Phi_0 = \lim_{\Pi_i \to 0} \Phi$  або  $\Phi_0 = \lim_{\Pi_i \to \infty} \Phi$ . У цих випадках говорять про пов-

ну автомодельність явища за параметром  $\Pi_r$ . За наявності повної автомодельності шуканий параметр  $a_{k+1}$  виявляється несуттєвим для даного явища.

Якщо не існує вказаного вище скінченного значення, але спостерігається асимптотичний розклад:

 $\Pi = \Pi_i^{\alpha} \Phi_1(\Pi_1, ..., \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, ..., \Pi_{n-k}) + o(\Pi_i^{\alpha}),$ 

то для досить малих (великих) значень  $\Pi_i^{\alpha}$  залежність (1.10) можна подати у вигляді

 $\Pi^* = \Phi_1(\Pi_1, ..., \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, ..., \Pi_{n-k}) + o(\Pi_i^{\alpha}),$ 

де  $\Pi^* = \Pi \Pi_i^{-\alpha}$ . У цьому випадку говорять про неповну автомодельність явища за параметром  $\Pi_i$ . Як і при повній автомодельності, безрозмірна функціональна залежність має меншу кількість аргументів, однак вигляд безрозмірного параметра  $\Pi^*$  не може бути отриманий з міркувань розмірності. Крім того, до складу  $\Pi^*$  входить шуканий параметр  $a_{k+1}$ , який у цьому випадку виявляється суттєвим для розглянутого явища.

Якщо не спостерігається жодна із зазначених вище ситуацій, тобто не існує скінченного граничного значення обезрозміреної функції (1.10) і неможливо записати її асимптотичний розклад при  $\Pi_i \rightarrow 0$  або  $\Pi_i \rightarrow \infty$ , то у цьому випадку говорять про відсутність автомодельності явища за параметром  $\Pi_i$ . За відсутності автомодельності зменшити кількість аргументів функції (1.10) неможливо.

Слід зауважити, що при розв'язанні тієї чи іншої задачі заздалегідь невідомо до якого типу автомодельностей належить її розв'язок. Тому за наявності суттєво відмінних від одиниці значень безрозмірних параметрів пропонується послідовно проаналізувати такі ситуації: повна автомодельність, неповна автомодельність, відсутність автомодельності. Слід також зазначити, що припущення щодо простої несуттєвості тих або інших параметрів (наявність повної автомодельності) є досить гіпотетичним. Як було показано вище, шукані параметри можуть бути суттєвими і коли автомодельність є наявною (неповна автомодельність). Тому, отримуючи на основі аналізу розмірностей автомодельні розв'язки, необхідно потурбуватися про їх перевірку.

### 1.7. НЕПОВНА АВТОМОДЕЛЬНІСТЬ ФРАКТАЛІВ

Розглянемо автомодельні властивості фракталів і з'ясуємо, які властивості фрактальних кривих приводять до степеневого закону зростання довжини ламаної, що апроксимує фрактальну криву, при зменшенні довжини її ланки (1).

Розглянемо замкнуту криву діаметром L (під діаметром будемо розуміти максимальну відстань між точками кривої). Апроксимуємо цю криву ламаною з довжиною ланки  $\eta$ . Із аналізу розмірності випливає, що кількість ланок N апроксимуючої ламаної повинна залежати тільки від відношення діаметра кривої до довжини ланки ламаної і не повинна залежати від кожного з цих параметрів окремо:

$$N(\eta) = f(L/\eta).$$
 (1.23)

Нехай вихідна крива має властивості однорідності і самоподібності. У чому полягає властивість однорідності? Нехай існує апроксимація кривої двома ламаними: першою ламаною з довжиною ланки  $\eta$  і другою — з довжиною ланки  $\xi < \eta$ . Тоді крива буде однорідною, якщо усі її ділянки між сусідніми вершинами першої ламаної породжують однакову кількість відрізків другої ламаної. Із властивості самоподібності, зокрема, випливає, що кількість таких відрізків залежить лише від відношення  $\xi/\eta$ , а не від  $\eta$  і  $\xi$  окремо.

Розглянемо криву, яка апроксимується ламаною з довжиною ланки, що дорівнює діаметру *L*. Із урахуванням означень (1.23) на кожен відрізок такої ламаної, довжина якої *L*, припадає

$$N_L(\eta) = \frac{f(L/\eta)}{f(1)} \tag{1.24}$$

відрізків ламаної з довжиною ланки  $\eta$ . Оскільки вихідна крива має властивості самоподібності, то існує вираз для кількості ланок ламаної з довжиною ланки  $\xi$ , які припадають на один відрізок ламаної з довжиною ланки  $\eta$ , враховуючи перетворення  $L \to \eta$  і  $\eta \to \xi$  у формулі (1.24):

$$N_{\eta}(\xi) = \frac{f(\eta/\xi)}{f(1)}.$$
 (1.25)

Завдяки однорідності, співвідношення (1.25) справедливе для усіх ланок ламаної з довжиною ланки  $\eta$ , кількість яких визначається за формулою (1.23). Таким чином, загальна кількість відрізків ламаної з довжиною ланки  $\xi$  визначається співвідношенням

$$N(\xi) = f(L/\eta) \frac{f(\eta/\xi)}{f(1)}.$$

Крім того, згідно з (1.23), можна записати

$$N(\xi) = f(L/\xi).$$

Порівнюючи два останніх співвідношення і вважаючи  $x = L/\eta$ ,  $y = L/\xi$ , отримуємо для функції *f* таке рівняння:

$$f(x) \cdot f(y/x) = f(y) \cdot f(1).$$

Це рівняння аналогічно функціональному рівнянню (1.2), з якого було отримано формулу розмірності фізичної величини. Як і
вище, продиференціюємо отримане рівняння за y і, поклавши у ньому y = x, одержимо

$$f(x)=Cx^{D},$$

де D = f'(1)/f(1); C — безрозмірна стала. З урахуванням цього для довжини апроксимуючої ламаної  $L(\eta) = \eta N(\eta)$  отримуємо вираз, аналогічний (1), при  $\lambda = CL^{D}$ .

Таким чином, степеневий закон зростання довжини апроксимуючої ламаної справедливий для неперервних замкнених кривих, що мають властивості повної однорідності і самоподібності. Слід зазначити, що обов'язково необхідна повна однорідність і самоподібність. Малоймовірно, що реальні фізичні об'єкти (зо-

Слід зазначити, що обов'язково необхідна повна однорідність і самоподібність. Малоймовірно, що реальні фізичні об'єкти (зокрема, берегова лінія) будуть задовольняти такі вимоги. Однак можна показати, що для опису кривої співвідношенням (1) достатньо, щоб вона задовольняла властивості локальної однорідності і локальної самоподібності. Це означає, що для будь-якої точки досліджуваної кривої існує  $\Delta$ -окіл цієї точки, в якій: поперше, кількість ланок  $\xi$ -ламаної між найближчими вершинами  $\eta$ -ламаної при  $\eta/\xi \rightarrow \infty$  залежить тільки від відношення  $\eta/\xi$  (локальна самоподібність); по-друге, будь-які дві ланки  $\eta$ -ламаної, належні  $\Delta$ -околу точки, що розглядається, породжують однакову кількість ланок  $\xi$ -ламаної (локальна однорідність). Проводячи аналогічні до попереднього випадку розрахунки для довжини ділянки  $\xi$ -ламаної між ближніми вершинами  $\eta$ -ламаної, отримуємо

$$L_{n}(\xi) = C\eta^{\bar{\nu}}\xi^{1-\bar{\nu}}.$$
 (1.26)

У даному випадку величина D характеризує досліджувану криву тільки у  $\Delta$ -околі деякої точки, тобто є локальною характеристикою, яка може змінюватись від точки до точки. Очевидно, що клас кривих, які мають властивості локальної однорідності і самоподібності, значно ширший, ніж клас кривих, що мають властивості повної однорідності і самоподібності.

Наведене вище дозволяє нам визначити фрактал як структуру, що має властивості однорідності і самоподібності. Оскільки фрактал визначається через поняття самоподібності, він тісно пов'язаний з поняттям проміжної асимптотики: фрактальні властивості з'являються тоді, коли розмір неоднорідностей об'єкта досить малий, але набагато більший від деякого, ще меншого.

Залежність (1.26) для фрактальних кривих, одержана за допомогою аналізу розмірностей, дозволяє проаналізувати автомо-

3\*

дельні властивості фракталів. Дійсно, співвідношенню (1.26) можна надати вигляду  $L_n(\xi) = \eta \Phi(\eta/\xi)$ , де  $\Phi(\eta/\xi) = (\eta/\xi)^{1-D}$ .

Оскільки функцію Ф при  $\eta/\xi \to \infty$  можна подати у степеневому вигляді, можна говорити про неповну автомодельність фрактальної кривої. Як було зазначено вище, у випадку неповної автомодельності, значення безрозмірного показника *D*, використовуючи аналіз розмірностей, встановити неможливо — вона залежить тільки від властивості кривої. Якби ми мали справу зі звичайною гладкою кривою, то існувала б скінченна границя  $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \Phi_0$  (зокрема, для прямої  $\Phi_0 = 1$ ). У цьому випадку D == 1,  $L_{\eta}(\xi) = \eta \Phi_0$ , і спостерігається повна автомодельність за па-

раметром η/ξ. Таким чином, основна ідея фракталів тісно пов'язана з неповною автомодельністю.

## **ДЕТЕРМІНОВАНІ ФРАКТАЛИ**

У цьому розділі розглянуто найпростіші моделі детермінованих фрактальних множин (геометричних і алгебраїчних) і знайдено вирази для хаусдорфової розмірності та розмірності подібності таких об'єктів. Детерміновані фрактальні множини точок застосовують як геометричні образи реальних фізичних та інших моделей. Крім того, узагальнення понять таких множин дозволяє ввести основні характеристики мультифракталів, які буде описано в наступних розділах.

## 2.1. ТРІАДИ КОХА

Бурхливий розвиток природознавства на початку XX ст., зокрема відкриття квантово-механічних ефектів та нових явищ у термодинаміці, поставив перед математиками задачу пошуку певних кривих і поверхонь, які б моделювали такі процеси. Серед таких нових процесів і був відкритий М. Броуном випадковий рух блукаючих частинок у рідині. Для опису траєкторії броунівських частинок потрібно було знайти такі криві, які б не мали дотичної у жодній з точок, оскільки криві, що описують рух броунівської частинки, різко, з великою швидкістю, змінюють свій напрям (похідна дорівнює нескінченності). Така крива була описана шведським математиком Хельге фон Кохом у 1904 р. і являє собою одну з найпростіших геометричних моделей найпростіших фрактальних кривих. Розгляд цього об'єкта дає наочне уявлення про основні властивості фрактальних кривих, тому розглянемо його першим і докладніше.

Для побудови кривої Коха, або так званої тріади Коха, береться відрізок довжиною *L*, який називається генератором. Генератор — це нульове покоління кривої Коха. Для генерації першого покоління кривої Коха кожна ланка генератора підлягає такій операції: відрізок довжиною *L* ділиться на 3 рівні частини, середня частина вилучається і замінюється двома іншими сторо-



РИС. 2.1. Тріадна крива Коха

нами (довжиною (1/3)L) побудованого на її базі рівнобічного трикутника. Тобто утворюється крива із 4 ланок загальною довжиною (4/3)L. На наступному етапі описаний вище алгоритм застосовується до кожної ланки кривої, утвореної при першій генерації. На *n*-му етапі отримується ламана лінія, яка називається передфракталом. Передфрактал і проміжні етапи його отримування зображені на рис. 2.1. Далі зазначена процедура повторюється  $n \to \infty$  разів, і як наслідок отримується неперервна, ніде недиференційовна, крива, тобто вона ніде не має дотичної, тріадна крива Коха.

Для такої кривої можна одержати вираз для фрактальної розмірності.

На *n*-му етапі кількість ланок *N*, довжина ланки апроксимуючої ламаної лінії  $\eta$ , а також її сумарна довжина  $L(\eta)$  визначаються так:

$$N = 4^{n}, \ \eta = \frac{L}{3^{n}}, \ L(\eta) = 3L \left(\frac{4}{3}\right)^{n}.$$
 (2.1)

İз врахуванням (2.1) для числа поколінь можна записати  $n = \ln (L/\eta)/\ln(3)$ , а для довжини передфрактала у *n*-му поколінні:

$$L(\eta) = 3L \exp\left\{\alpha \ln\left(\frac{L}{\eta}\right)\right\} = 3L \left(\frac{L}{\eta}\right)^{\alpha}, \qquad (2.2)$$

де  $\alpha = (\ln 4 - \ln 3) / \ln 3 \approx 0,262.$ 

Співвідношення (2.2) аналогічне співвідношенню Річардсона (1) для довжини берегової лінії, якщо покласти  $D_s = 1 + \alpha = \log_3 4$  і  $\lambda = 3L^{D}$ .

Розглянута крива Коха є самоподібною множиною. Саме ця якість кривої Коха визначає фрактальний характер залежності  $L(\eta)$ . Продемонструємо цю якість. Для будь-якої ділянки тріади Коха між двома найближчими вершинами ми можемо вибрати масштабний множник  $r(N) = (1/3)^n$  (n — будь-яке число), і покрити вихідну ділянку (генератор) кривої Коха її  $N = 4^n$  зменшеними копіями, піддаючи їх паралельним перенесенням та поворотам. Враховуючи властивості тріади Коха (2.1), знаходимо аналогічне до (1.11) співвідношення, де  $D_S = \log_3 4 = 1,26186...$  Неважко побачити, що фрактальна розмірність кривої Коха (показник степеня у співвідношенні Річардсона) і розмірність самоподібності цієї кривої дорівнюють одна одній. Цей факт має місце для фрактальних множин з топологічною розмірністю  $D_T = 1$ .

Подібно до тріадної кривої Коха, але з іншою матрицею перетворення, будується дракон Хартера—Хейтуея.

Зауважимо, що тріадну криву Коха можна розглядати як засіб вимірювання порізаних кам'янистих берегових ліній, зокрема, як у класичному випадку, острова Великої Британії. Але між цими лініями існують дві фундаментальні відмінності. Перша з них: довжина тріадної кривої Коха є величиною детермінованою, а довжина берегової лінії — величина статистична. Довжина тріадної кривої є масштабно-інваріантною на всіх масштабах, щодо довжини лінії узбережжя, то вона статистично різниться на різних масштабах і ці різниці не дозволяють визначити для довжини берегової лінії єдиний масштаб її інваріантності. Таким чином, довжина лінії узбережжя є статистичним фракталом. Друга відмінність стосується діапазону масштабів, усередині якого простежується фрактальна поведінка (масштабна інваріантність). А саме, для розрахунку довжини лінії узбережжя існують найбільший і найменший масштаби: найбільший, будемо вважати 10<sup>3</sup> ... 10<sup>4</sup> км, — розмір острова Великої Британії; найменший, будемо вважати 10<sup>-5</sup> км = 1 мм, — масштаб гранули камінців, що утворюють берегову лінію. Таким чином, діапазон масштабної інваріантності довжини берегової лінії становить дев'ять поряд-

39



РИС. 2.2. Тріадна сніжинка Коха

ків величини. Для тріадної кривої Коха, хоча й існує найбільший масштаб у розмір генератора, конструкція може бути побудована для нескінченного діапазону масштабів. Цей приклад ще раз демонструє, що, на відміну від детермінованих геометричних фракталів, для природних систем, яким властива фрактальність (масштабна інваріантність), існують верхня і нижня межі, в яких цю фрактальність можна досліджувати.

При побудові замкненої кривої як генератор можна використовувати також будь-який правильний многокутник з довжиною сторони L. Розглянемо у ролі генератора рівнобічний трикутник загальною довжиною 3L і застосуємо алгоритм, описаний вище. Як результат першої генерації отримуємо, що рівнобічні трикутники з довжиною сторони (1/3)L розміщені у центрі кожної сторони трикутника 0-генерації. Загальна кількість сторін фігури — 12, тобто  $N_1 = 12$ . На наступному, другому, етапі рівносторонні трикутники вже з довжиною сторони (1/9) Судуть розміщені у центрі кожної сторони трикутника 1-генерації. Загальна кількість сторін фігури — 48, тобто  $N_2 = 48$ . Очевидно, що конструкція може бути побудована до  $n \to \infty$ . Периметр отриманої фігури дорівнює  $P_n = \eta_n N_n$ , де  $\eta_n$  — довжина сторони трикутника на *n*-етапі алгоритму побу-дови тріади Коха,  $N_n$  — кількість сторін отримуваної фігури на *n*-етапі алгоритму побудови тріади Коха. Із рис. 2.2 маємо: P<sub>0</sub> = = 3L,  $P_1 = 4L$ ,  $P_2 = (16/3)$  L = 5,3(3)L. Тобто, периметр зростає за мірою зростання номера *n*-го етапу процедури. Периметр тріади Коха при  $n \to \infty \epsilon$  неперервним, але не диференційованим. Враховуючи властивості цієї тріади Коха і (1.11), знов маємо  $\hat{D}_s =$ =  $\ln 4/\ln 3 \approx 1,26$ , тобто фрактальна розмірність є дробовою і D > 1.

Для побудови узагальненого випадку кривої Коха за генератор виберемо правильний *n*-кутник. Кожна сторона цього *n*-кутника розбивається на m > 2 рівні частини. Після цього k < m частин відкидаються і на їх основі будуються правильні *l*-кутники з довжиною сторони, рівною довжині відкинутої частини. При побудові стежать за тим, щоб крива сама себе не перетинала, для чого необхідно накласти обмеження на кількість і вибір

ланок, що відкидаються. Як наслідок  $n \to \infty$  застосування цього алгоритму отримуємо так звану сніжинку Коха, яку позначаємо як *SC* [ $n, m, T, \ell$ ], де  $T = \{t_1, t_2, ..., t_k\}$  — множина цілих чисел  $t_k$ , що відповідають номерам, які відкидаються при генерації наступного покоління ланок.

Розмірність самоподібності сніжинки Коха визначається як  $D_s = \log_m(m + k(1 - 2))$ . Класична сніжинка Коха (тріада) позначається *SC* [3, 3, {2}, 3]. Таким чином, використовуючи алгоритм побудови кривої, запропонований Х. Кохом, можна отримати фрактальну криву з будь-якою розмірністю подібності в інтервалі  $1 \le D_s \le 2$ .

У результаті побудови кривої Коха може бути отримана не тільки плоска, а й просторова крива. Для цього необхідно дозволити самоперетин кривої (зняти обмеження для величин  $n, m, \ell, T$ ) і домовитись: усі конструкції, що ведуть до самоперетину, про-



41

водити в іншій площині. Розмірність подібності такої кривої  $D_s > 2$ . На відміну від плоскої кривої Коха, для якої  $1 < D_s < 2$ , і яка є утворенням, проміжним між лінією і площиною, просторова крива Коха займає проміжне положення між площиною і простором.

Один із граничних випадків плоскої кривої Коха називається трикутним неводом. Ця лінія повністю без самоперетину заповнює деяку поверхню. Послідовні етапи побудови такої кривої зображено на рис. 2.3. Генератором для цієї фігури є одиничний відрізок, а твірний елемент складається з N = 2 ланок довжиною  $r = 1/\sqrt{2}$ . Кожне покоління цієї кривої схоже на папір у клітинку, а при  $n \to \infty$  ця крива без самоперетину заповнює прямокутний рівнобічний трикутник. Фрактальна множина, що утворена трикутним неводом, має розмірність самоподібності  $D_S = 2$ .

Трикутний невід є аналогом так званої лінії Пеано (властивості цієї лінії будуть розглянуті у параграфі 3.1), яка також повністю без самоперетину заповнює деяку поверхню. Трикутний невід і лінія Пеано не є простими дугами (тобто фігурами, що гомеоморфні відрізку). На ділянці, яку вони заповнюють, є нескінченно багато точок склеювання (точок, через які дані криві проходять більше ніж один раз). У розділі 3 поняття простої дуги і гомеоморфізму будуть розглянуті детальніше.

#### 2.2. МНОЖИНА КАНТОРА

Класичним прикладом детермінованої фрактальної множини з розмірністю  $D_s < 1$  є множина Кантора, або канторівський пил. Ця множина названа на честь Георга Кантора, який описав її у 1883 р. Генератором тріадної канторівської множини є відрізок одиничної довжини (нульове покоління). На кожному етапі побудови множини Кантора виконується така процедура: відрізок ділиться на три рівні частини, після чого середня частина відкидається. При  $n \to \infty$  отримуємо множину Кантора (рис. 2.4).

З'ясуємо властивості множини Кантора. У *n*-му поколінні множина складається з  $N = 2^n$  відрізків довжиною  $l = (1/3)^n$  кожний. При  $n \to \infty$  довжина канторівської множини — сума довжин відрізків, які залишилися, — прямує до нуля, оскільки  $L = \lim_{n \to \infty} lN = \lim_{n \to \infty} (2/3)^n = 0$ . Це означає, що канторівський пил не має власної довжини (множина міри — нуль), а довжина його



РИС. 2.4. Множина Кантора

доповнень до відрізку [0, 1] дорівнює одиниці: (1/3 + 2/9 + 4/27 + 5/81 + ... = 1), оскільки довжина вилученого відрізка у *n*-му поколінні дорівнює  $(1/3)^n$ . Ці довжини утворюють геометричну прогресію з першим членом та знаменником, що дорівнюють 1/3. Кількість вилучених відрізків у *n*-поколінні становить  $2^{n-1}$ . Таким чином, для довжини вилученої частини канторівської множини знаходимо

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Множина Кантора, побудована у такий спосіб на інтервалі прямої [0, 1], не є самоподібною. Один із методоів отримання самоподібної множини Кантора — це її екстраполяція на інтервалі [0, 3]. А саме, покриємо канторівськими множинами підінтервали [0, 1] і [2, 3] із генераторами у вигляді одиничного відрізка. Повторюючи алгоритм побудови множини Кантора для цих підінтервалів, при  $n \to \infty$  отримуємо самоподібну множину Кантора на інтервалі [0, 3].

Коефіцієнт подібності канторівської множини дорівнює r = 1/3. Кількість зменшених копій канторівських множин у кожному n поколінні подвоюється, тобто N = 2. Використовуючи (1.11), для розмірності подібності множини Кантора одержуємо  $D_S = \ln N/\ln(r^{-1}) = \log_3 2 \approx 0,63$ . Для самоподібних фрактальних множин, як це було показано на прикладі кривої Коха, розмірність подібності дорівнює фрактальній розмірності. Таким чином, фрактальна розмірність тріадної канторівської множини  $D = D_S \approx 0,63$ .

У загальному випадку, обираючи для побудови канторівської множини довжину відрізків  $\xi < 1$  та використовуючи для побу-

дови *k* блоків (первинні фрагменти фрактала), маємо для розмірності подібності  $D_s = \ln k / \ln(\xi^{-1})$ . Оскільки розмір отриманого фрагмента повинен бути меншим за первинний блок, то необхідно накласти обмеження  $k\xi < 1$ , яке, у свою чергу, приводить до вимоги  $D_s < 1$ . Крім того, при побудові канторівської множини можна вибирати різну довжину відрізків  $\xi$  для різних блоків відрізків. Як наслідок такого узагальнення, може бути отримана не тільки симетрична, а й несиметрична канторівська множина. Таким чином, канторівська множина може бути побудована з будь-якою заданою розмірністю з інтервалу  $0 < D_s < 1$ , а це означає, що канторівська множина займає проміжне положення між точкою (евклідова розмірність дорівнює 0) та лінією (евклідова розмірність дорівнює 1).

## 2.3. КРИВІ СЕРПІНСЬКОГО

Розглянемо ще два класичних детермінованих фрактали — килим та серветка Серпінського.

Для генератора килима Серпінського використовується квадрат, який потім розбивається на дев'ять квадратів, з яких центральний квадрат вилучається. Така сама процедура застосовується до восьми квадратів, що залишилися. При  $n \to \infty$  замість одного квадрата одержуємо килим із своєрідним візерунком (рис. 2.5). Таким чином, твірний елемент складається з N = 8квадратів, одержаних із генератора перетворенням подібності (стиснення) з коефіцієнтом подібності r = 1/3. Розмірність подібності килима Серпінського  $D_S = \ln 8/\ln 3 \approx 1,89$ .

дібності килима Серпінського  $D_s = \ln 8/\ln 3 \approx 1,89$ . За таким самим алгоритмом будується трикутна серветка Серпінського, генератором для якої обирається рівнобічний трикутник (рис. 2.6).

Слід зазначити суттєву різницю між килимом та серветкою Серпінського: у трикутній серветці елементарні комірки з'єднані вершинами, а в килимі — уздовж своїх боків. Тому мінімальне число точок, яке потрібно вилучити для розрізу фрактала у випадку трикутної серветки Серпінського, є скінченним і дорівнює двом, а для килима Серпінського — є нескінченним. Таке мінімальне число точок називається розгалуженістю фрактала. Точне значення розгалуженості є несуттєвим, але деякі фізичні властивості фракталів зі скінченною та нескінченною розгалуженостями суттєво різняться.

Аналогічним чином може бути побудований об'єкт під назвою губка Серпінського. Як генератор у цьому випадку вико-



РИС. 2.5. Килим Серпінського



РИС. 2.6. Трикутна серветка Серпінського

ристовується куб. Поділом ребер на три рівні частини цей куб розбивається на 27 конгруентних кубиків, після чого центральний кубик та шість прилеглих до нього кубиків вилучаються. Як і килим та серветка Серпінського, губка є лінією, розмірність самоподібності якої за формулою (1.11) при N = 20 і r = 1/3 дорівнює  $D_S \approx 2,73$ .

Криві Серпінського використовуються як моделі багатьох фізичних явищ, зокрема критичних явищ поблизу точок фазових переходів у спіновому склі, у теорії протікання і т. ін.

#### 2.4. ВІДОБРАЖЕННЯ ПЕКАРЯ

Розглянемо перетворення площини (відображення площини на площину), відоме під назвою відображення пекаря (названо за схожістю з діями, що виконує пекар, який місить тісто). Багаторазове застосування відображення пекаря перетворює первинну компактну множину точок на площині (квадрат або прямокутник) у фрактальну структуру.

Перетворення пекаря на площині ху задається такими формулами:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_a x_n, \ y_n < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \lambda_b x_n, \ y_n > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, \ y_n < \frac{1}{2}, \\ 2\left(y_n - \frac{1}{2}\right), \ y_n > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

де  $0 \le x_n \le 1$ ,  $0 \le y_n \le 1$ ,  $\lambda_a < 1/2$ ,  $\lambda_b < 1/2$ . Таким чином, перетворення пекаря — лінійне перетворення, яке розтягує квадратну ділянку площини в одному напрямі, стискає її у поперечному напрямі, розрізає навпіл та розташовує одну половину поверх іншої у такий спосіб, як це подано на рис. 2.7.

Будь-яке перетворення площин, у тому числі і відображення пекаря, характеризується так званим якобіаном перетворення.



РИС. 2.7. Відображення пекаря

Лінійне перетворення можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

де *J* — квадратна матриця, яка називається матрицею Якобі. Для відображення пекаря матриця Якобі має такий вигляд:

$$J = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{cases} \lambda_a, \ y < \frac{1}{2}, \\ \lambda_b, \ y > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Детермінант матриці Якобі називається якобіаном  $|J| = \det(J)$ . Значення якобіана показує, у скільки разів змінюється площа множини при перетворенні. При |J| > 1 площа збільшується, а при |J| < 1 — зменшується. Якщо  $|J| \neq 0$ , то існує обернене перетворення. Випадок |J| = 0 відповідає втраті оберненості. Оскільки для відображення пекаря якобіан менший ніж одиниця, це означає, що площа скорочується.

Перетворення пекаря може бути узагальнено:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_a x_n, \ y_n < \alpha, \\ \frac{1}{2} + \lambda_b x_n, \ y_n > \alpha \end{cases} \quad y_{n+1} = \begin{cases} \frac{y_n}{\alpha}, \ y_n < \alpha, \\ \frac{y_n - \alpha}{1 - \alpha}, \ y_n > \alpha. \end{cases}$$

Фрактальна розмірність відображення пекаря задовольняє рівняння D = 1 + d, де  $d \in$  розв'язок трансцендентного рівняння  $\lambda_a^d + \lambda_b^d = \lambda$ . При  $\lambda_a = \lambda_b = \lambda$  одержуємо  $D_C = 1 + \ln 2/|\ln \lambda|$ .

#### 2.5. ВІДОБРАЖЕННЯ ЕНОНА

Відображення Енона (відображення типу "підкова") має фундаментальне значення у більшості моделей хаотичних динамічних систем, заснованих на диференціальних та різницевих рівняннях. Як і перетворення пекаря, ітераційне використання перетворення типу "підкова" може породжувати фрактальні множини. Зокрема, за допомогою цього перетворення можна отримати критерій виникнення хаотичних коливань динамічної системи.

Будемо називати двовимірним відображенням "підкова" пере-

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \ y_{n+1} = \beta x_n$$



РИС. 29. Вигляд площини після N = 4 кроки перетворення відображення "підкова"

творення площини на площину, яке задається співвідношеннями:

При  $|\beta| < 1$  це відображення зменшує площу в *ху*-площині. Крім того, воно витягує та вигинає області на площині, як це схематично зображено на рис. 2.8, що приводить до утворення фігур, що нагадують підкову. Прямокутна область площини розтягується у вертикальному напрямі, стискується у горизонтальному та вигинається, після чого накладається на вихідну область. При цьому точки, що належать вихідній області, відображуються на ту саму область, крім точок поблизу вигину "підкови".

Перетворення "підкова" побудовано так, що після достатнього числа ітерацій група близьких точок вихідної множини розосереджується по всій прямокутній області (рис. 2.9), й інформація про те, де будь-яка точка знаходилась у вихідній множині, втрачається. Крім того, вихідна компактна область відображається на все більш тонкі множини точок, що зумовлює наявність у цієї множини фрактальної структури.

При відображенні Енона у вихідній області залишаються лакуни. Це свідчить про те, що побудована множина заповнює менш ніж цілий підпростір вихідного простору, тому фрактальна розмірність цієї множини повинна бути D < 2.

## 2.6. МОДЕЛІ ФРАКТАЛІВ МАНДЕЛЬБРОТА І ДЖУЛІ

Розглянемо детерміновані алгебраїчні фрактали, запропоновані Мандельбротом і Джулі, — класичні приклади фракталів, побудованих у комплексній площині.

Математичний опис фрактала Мандельброта досить простий: у комплексній площині для кожної точки *с* з деякого інтервалу будується рекурсивна функція вигляду  $Z(N + 1) = Z(N)^2 + c$ . У цій моделі як генератор виступають координати точки *c*, а параметр *Z* є залежною величиною. Тому для того, щоб перша похідна від функції *Z* у початковій точці дорівнювала нулю, для побудови фрактала Мандельброта існує правило: початкове значення параметра *Z* дорівнює нулю. Тоді рекурсивна функція Мандельброта у початковій точці має мінімум, і надалі буде мати тільки великі значення:  $\frac{d}{dZ}Z = \frac{d}{dZ}(Z^2 + c) = 2Z$ ,  $Z_c = 0$ . Після *N* застосувань цієї процедури розрахунку координат точки *c*, у комплексній площині буде побудована фігура, що схожа на грушу (рис 2.10,*a*).



РИС. 2.10. Фрактали Мандельброта (а) і Джулі (б)

Зазначимо, якщо рекурсивна формула буде мати інший вигляд, тоді треба обирати інше значення вихідної точки *с* для параметра *Z* (зокрема, якщо  $Z = Z^2 + Z + c$ , тоді для вихідної точки маємо: 2Z + 1 = 0, Z = -1/2). Доведено також, що в моделі фрактала Мандельброта  $|Z| \le 2$ ,  $|c| \le 2$ .

Схема побудови алгебраїчного фрактала Мандельброта наведена на рис. 2.10, а. Вихідна точка моделі Z = 0 відповідає центру груші; після N кроків ітерацій все тіло груші заповниться, а в тому місці, де зупинилася остання ітерація, почне утворюватися нова "брунька" фрактала. Оскільки формула фрактала є квадратним поліномом, перша "брунька" фрактала буде у чотири рази менша за тіло. Після наступних N ітерацій, справа і зліва від тіла фрактала будуть з'являтися все нові і нові "бруньки", які точнісінько повторюють собою тіло фрактала: чим більша кількість ітерацій, тим детальнішим буде візерунок фрактала.

Для моделі фрактала Джулі використовується та сама рекурсивна формула  $Z(N + 1) = Z(N)^2 + c$ , що і для моделі фрактала Мандельброта. Відмінність полягає в тому, що змінним параметром є Z, а c — комплексна стала. Це означає, що для цієї моделі не існує обмежень для вихідного положення. Фрактал Джулі (рис. 2.10,6) має симетричну форму відносно центральної точки, у той час як фрактал Мандельброта має форму, симетричну відносно осі. Відмінність між моделями полягає також у тому, що модель фрактала Джулі є динамічною моделлю, а модель фрактала Мандельброта — статичною, оскільки початкове значення параметра Z = 0.

#### 2.7. ФУНКЦІЯ ВЕЙЄРШТРАССА—МАНДЕЛЬБРОТА

Функція Вейєрштрасса—Мандельброта — один із прикладів масштабно-інваріантної фрактальної кривої. У загальному випадку ця функція є кривою y(x), яка однозначно проектується на вісь x і визначається як сума ряду:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(k_n) \cos(k_n x + \varphi_n), \qquad (2.3)$$

де  $\varphi_n$  — послідовність випадкових фаз, при цьому спостерігаються такі асимптотики:  $a(k_n) \sim k_n^{-\alpha}$ ,  $k_n \sim n \to \infty$  ( $\alpha > 0$  — параметр функції).

Функція, запропонована К. Вейєрштрассом як приклад функції без похідної, отримується з функції загального вигляду (2.3) при таких значеннях параметрів:  $\varphi_n = 0$ ,  $k_n = b^n$ ,  $a(k_n) = k_n^{(D-2)}$ , 1 < D < 2. Вважається, що ця функція характеризується розмірністю *D*, яка аналогічна фрактальній розмірності самоподібних множин. Графік функції Вейєрштрасса—Мандельброта при різних значеннях *D* подано на рис. 2.11.

При значеннях D, які мало відрізняються від одиниці, функція практично є гладкою. Якщо розмірність D збільшується до двох, то функція починає сильно флуктувати і нагадувати шум, що накладається на загальну тенденцію функції до зростання. Функція Вейєрштрасса однорідна за Ейлером і задовольняє співвідношення

$$y(bx) = b^{2-D} y(x).$$

Оскільки масштабні перетворення здійснюються з різними коефіцієнтами (b — уздовж осі x;  $b^{2-D}$  — уздовж осі y), то крива y(x) буде не самоподібною, а самоафінною.

Із теорії тригонометричних рядів відомо, що швидкість зменшення фур'є-спектра функції (значення показника α) відповідає кількості похідних цієї функції. Проводячи почленне диференціювання (2.3), отримуємо

$$\frac{d^j}{dx^j} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(k_n) \left(k_n\right)^j \cos(k_n x + \varphi_n).$$
(2.4)



РИС. 2.11. Функція Вейєрштрасса—Мандельброта при b = 1,8 та D: a - 1,1; b - 1,5; b - 1,9 [84]

Ряд (2.3) збігається, якщо  $a(k_n) \sim k_n^{-\alpha}$  з  $\alpha > 0$ . Ряд для *j*-ї похідної (2.4) збігається при  $\alpha > j$ .

Таким чином, якщо  $0 < \alpha < 1$ , то функція y(x) — неперервна, але недиференційовна, а її графік — фрактальна лінія. Якщо  $1 < \alpha < 2$ , то графік y(x) — звичайна гладка лінія, а графік похідної — фрактал. Отже, фрактальна лінія має менш ніж одну похід-

ну ( $\alpha < 1$ ). Для приросту такої функції можна записати  $\Delta y = \mu(\Delta x)^{\alpha}$ , де  $\mu$  — дробова похідна порядку  $\alpha$ .

Докладніше зв'язок фрактала з операціями дробового диференціювання та інтегрування розглянуто в розділі 4.

Прикладом фізичного об'єкта з низькою гладкістю є, зокрема, вінерівський процес (математична абстракція броунівського руху, коли маса частинки та час між зіткненнями прямують до нуля).

#### 2.8. МЕТОДИ ЗГОРТАННЯ ТА РОЗГОРТАННЯ. БІСОВІ СХОДИ

Множина Кантора — це модель, яка найчастіше використовується для теоретичних досліджень властивостей фрактальних об'єктів. На прикладі цієї множини можна розглянути різні алгоритми побудови як звичайних фрактальних множин (монофракталів), так і мультифракталів — множин, які є суперпозицією декількох фрактальних множин з неоднаковими розмірностями (розглянуто у розділі 4).

Методи побудови фрактальних множин, розглянуто в розділі 2, зводяться до рекурсивних послідовностей  $n \to \infty$  операцій: 1) початкова множина розбивається на скінченну кількість підмножин, частина яких або відкидається (канторівські множини, криві Серпінського), або замінюється (криві Коха); 2) відбувається приріст нових множин, які повністю повторюють початкову множину (фрактали Мандельброта і Джулі).

Припишемо початковому елементу — генератору — деяку масу *m* і будемо вважати, що ця маса розподілена на генераторі рівномірно. Тоді маса передфракталів буде змінюватись крок за кроком (у випадку множини Кантора — зменшуватись, а у випадку кривої Коха — збільшуватись). При  $n \to \infty$  множина Кантора буде мати нульову масу, а крива Коха — нескінченно велику масу. Очевидно, така обставина заважає надати цим та іншим подібним моделям фракталів реального фізичного змісту.

З цієї точки зору, особливого змісту набувають моделі, коли у процесі їх побудови загальна маса фрактальної множини не буде змінюватись. Такий метод побудови фракталів отримав назву методу згортання, оскільки нагадує процес згортання молока (в початковій однорідній рідині з'являються області з підвищеною густиною, при цьому загальна маса рідини не змінюється).

#### 2.8.1. Метод згортання

Розглянемо дію методу згортання на прикладі множини Кантора. За генератор будемо використовувати не одиничний відрізок, а однорідний стержень з густиною  $\rho_0$  та довжиною  $l_0$ . Розділимо його навпіл так, щоб маси отриманих стерженьків були однаковими і дорівнювали  $m_1 = m_0/2$ , де  $m_0 = \rho_0 l_0$  — повна маса стержня. Не змінюючи маси цих стерженьків, пластично деформуємо їх так, що кожен з них скоротиться до довжини  $l_1 = 1/2$ . Унаслідок цих дій густина стержня зросте до  $3\rho/2$ , а загальна маса збережеться. На *n*-му кроці застосування методу згортання канторівська множина може бути подана як набір з  $N = 2^n$  стерженьків завдовжки  $l_n = l_0 3^{-n}$  і масою  $m_n = m_0 2^{-2}$  кожен та з густиною  $\rho_n = \rho_0 l_n^{D-1}$  ( $D = \ln 2/\ln 3$ ). Таким чином, при  $n \to \infty$  початково рівномірний розподіл маси стержня розділиться на безліч дрібних і густіших стерженьків.

На рис. 2.12 подано тріадну канторівську множину, отриману методом згортання. На цьому рисунку висота кожної ділянки (стержнів) визначається її густиною, при цьому загальна площа (маса) всіх ділянок залишається сталою.

Звернемо увагу, що величина  $m_n$  (маса *n*-го покоління стержня) є часткою загальної маси канторівської множини  $m_0$  (маси всього стержня). У загальному випадку під  $m_0$  можна розуміти міру будь-якої фізичної величини (електричний заряд, магнітний момент, густина ймовірності та ін.).

На основі розривної фрактальної множини Кантора можна побудувати нерозривну фрактальну функцію. Якщо на інтервалі канторівської множини 0 < x < 1 проінтегрувати задану на ньому функцію розподілу маси M(x), де x — координата (наприклад, стержня; початок відліку — лівий кінець стержня), то отримаємо вираз для маси канторівської множини:

$$M(x) = \int_0^x \rho(l) dl = \int_0^x dm(l),$$

де  $\rho_n(l) = (2/3)^n$  на канторівських ділянках і  $\rho_n(l) = 0$  на тих ділянках, що відкидаються. Маса канторівської множини на кожному кроці ітерації перерозподіляється на ті ділянки, що залишаються, і хоча густина маси на цих ділянках зростає, повна маса не змінюється і дорівнює  $m_0 = \rho_0 l_0$  (рис. 2.12).



РИС. 2.12. Множина Кантора в процесі згортання



РИС. 2.13. Бісові сходи

При  $n \to \infty$  отримуємо функцію, яка називається бісовими сходами, із нескінченно великою кількістю сходинок. Оскільки функція M(x) змінюється на відрізку  $[0, l_0]$  від нуля до  $m_0$  за рахунок нескінченно великої кількості нескінченно малих стрибків, то графік цієї функції (рис. 2.13) майже всюди залишається горизонтальним.

Бісові сходи мають самоафінну природу: графік функції переходить сам у себе (у тому контексті, як це описано в параграфі 1.2) при одночасному зменшенні горизонтальних розмірів у три рази, а вертикальних — у два рази.

#### 2.8.2. Метод розгортання

Розглянемо інший метод побудови рекурсивних фрактальних множин — метод розгортання. Нехай при n = 0 множина з *N*. точок, яку назвемо генератором, характеризується вектором  $\vec{U}_l$ , l = 1,..., N. Запровадимо елементарну комірку (множину точок), яку назвемо ініціатором. При n = 1 передфрактал буде складатися з *N* ініціаторів, отриманих внаслідок паралельного перенесення вихідної комірки на вектори  $\vec{U}_l$ . На другому кроці при n = 2 генератор масштабується з коефіцієнтами  $\xi_l$ , а передфрактал, отриманий при n = 1, паралельно переноситься на вектори  $\xi_l \vec{U}_l$ .

На *n*-му кроці побудови фрактала отримуємо, що генератор масштабується з коефіцієнтом  $\xi_1\xi_2...\xi_{n-1}$ , а передфрактал складається з  $N^n$  ініціаторів, що визначаються векторами:

$$\alpha_0 \vec{U}_{l_1} + \alpha_1 \vec{U}_{l_2} + \dots + \alpha_{n-1} \vec{U}_{l_n},$$

 $\exists e \ \alpha_0 = 1, \ \alpha_j = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_j; \ j = 1, \dots, \ n-1; \ l_i = 1, \ \dots, \ N.$ 

Зазначимо, що у процесі розгортання розмір ініціатора (елементарної комірки) не масштабується і залишається постійним. Масштабні параметри  $\xi_j$  (параметри розгортання) на кожному кроці побудови фрактала можуть різнитися між собою і обираються так, щоб ініціатори (елементарні комірки) не перекривались. У випадку, коли всі масштабні параметри  $\xi_j$  дорівнюють сталій величині  $\xi$ , яка не залежить від *j*, тоді  $\alpha_j = \xi'$  і отримана фрактальна множина є самоподібною з розмірністю подібності  $D_s = \ln N/\ln\xi$ .

Зауважимо, що розмір фрактала, отриманого методом розгортання, характеризується двома граничними параметрами: нескінченно великий зовнішній розмір  $I_{30BH}(I_{30BH} \rightarrow \infty)$  і скінченний внутрішній розмір  $l_{\text{внутр}}$  ініціатора (елементарної комірки). Фрактальні властивості отриманого фрактала виявляються на масштабах  $l >> l_{\text{внутр}}$ .

Розмір фрактала, отриманого методом згортання, характеризується скінченним зовнішнім розміром  $l_{30BH}$  (розміром генератора) і нескінченно малим внутрішнім розміром  $l_{BHYTP}$  ( $l_{BHYTP} \rightarrow 0$ ). Фрактальні властивості такого фрактала виявляються на масштабах  $l \ll l_{30BH}$ .

Реальні природні (фізичні) об'єкти мають скінченні і внутрішній, і зовнішній розміри. Тому для природних (фізичних) фракталів співвідношення (1) необхідно розглядати як проміжну асимптотику, яка спостерігається на масштабах l, що задовольняють умову  $l_{внутр} \ll l \ll l_{30BH}$ . Це означає, що існує обмежена кількість розгортань або згортань, які приводять до появи скінченних зовнішнього та внутрішнього розмірів фрактала відповідно.

За винятком наведеного вище зауваження, методи згортання і розгортання схожі. Зокрема, для побудови симетричної канторівської множини методом розгортання необхідно вибрати ділянку шириною  $l_{внутр}$  як ініціатор (елементарна комірка), два симетричних вектори  $\bar{U}_l = \pm a(\xi - 1)/2$  як генератор, а масштабний фактор (фактор розгортання)  $\xi \ge 2$  вибирати незмінним на кожному кроці ітерації.

#### 2.9. ПОБУДОВА ФРАКТАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Існує декілька методів побудови фрактальних поверхонь. Зокрема, фрактальні поверхні можна отримати при паралельному перенесенні фрактальної кривої на відстань L уздовж напряму, перпендикулярного до площини, в якій вона розміщена. Для вимірювання площі такої поверхні покриємо її квадратами з довжиною сторони  $\eta$ . Кількість квадратів, необхідних для покриття фрактальної поверхні довжиною l, визначається співвідношенням

$$N(\eta) = \frac{L}{\eta} N_1(\eta),$$

де  $N_1(\eta)$  — кількість відрізків, необхідних для покриття вихідної фрактальної кривої. Очевидно  $N_1(\eta) \sim \eta^{-D_1} (D_1 - \phi)$ рактальна розмірність вихідної кривої). Тоді  $N_1(\eta) \sim \eta^{-(D_1+1)}$ , і фрактальна розмірність побудованої поверхні дорівнює  $D = D_1 + 1$ .

Для загального випадку існує емпіричне правило Мандельброта: якщо множина  $\Im$  є прямим добутком двох незалежних фрактальних множин  $\Im_1$  і  $\Im_2$ , то її фрактальна розмірність дорівнює сумі фрактальних розмірностей множин  $\Im_1$  і  $\Im_2$ :  $D(\Im) = D(\Im_1) + D(\Im_2)$ .

Для побудови більш симетричної фрактальної поверхні можна взяти, зокрема, модель канторівських блоків, в якій використовується двовимірна узагальнена канторівська множина. Квадратна пластина із площею  $L \times L$  та довільною товщиною вибирається як генератор. При n = 1 з цієї пластини вирізається хрест, який розділяє пластину на чотири конгруентні квадрати розміром  $L/\xi$  кожний, де  $\xi > 2$ . Цей процес повторюється до нескінченності, а внаслідок накладання передфракталів один на одний отримується так званий канторівський блок. Фрактальна розмірність отриманої поверхні визначається рівнянням D = 1 + $+ log_{\xi}4$ . При  $\xi = 2$  знаходимо, що D = 3, тобто побудована множина є звичайним просторовим тілом. Застосування моделі канторівських блоків обмежено умовою  $\xi < 4$ , оскільки при  $\xi = 4$ фрактальна розмірність D = 2, і хоча отримана поверхня не є гладкою, шорсткість швидко зменшується під час ітераційного процесу і не дає помітного ефекту.

Для побудови фрактальних поверхонь, у яких немає виділених напрямів, застосовують зокрема алгоритм випадкового перенесення. Для того щоб побудувати фрактальну поверхню в декартовій системі координат, фрактальну криву з розмірністю  $D_1$ , що лежить в *ху*-площині, перенесемо паралельно уздовж *y*-осі. Отриману поверхню (генератор) можна описати за допомогою функції двох змінних  $Z_i(x,y)$ . Повернемо цю поверхню на кут  $\varphi$  в *ху*-площині та збільшимо вертикальну координату у *h* разів. Унаслідок цих операцій отримуємо нову поверхню:

$$Z_1(x, y; h, \varphi) = hZ_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

İ для фрактальної поверхні можна записати:

$$Z(x, y) = \sum_{h, \varphi} Z_1(x, y; h, \varphi).$$

Шляхом цифрового моделювання показано, що у випадку, коли h — стала величина, а кут  $\varphi$  обирається випадково, фрактальна розмірність поверхні вже після декількох ітерацій становить  $D = 1 + D_1$ , тобто збігається із фрактальною розмірністю генератора.

Цікаво, що за цим алгоритмом можна побудувати поверхню із фрактальними властивостями навіть у тому випадку, коли як

генератор вибирається нефрактальна поверхня, наприклад східчаста функція:

$$Z_1(x,y) = \Theta(x),$$

де  $\Theta(x) - функція Хевісайда.$ 

Значення кута  $\varphi$  на кожному кроці ітерацій будемо вибирати з однорідного випадкового розподілу в інтервалі [0, 2 $\pi$ ], а сталої величини h — за формулою  $h = 1/\sqrt{n}$ . У цьому випадку отримується поверхня з розмірністю D = 5/2.

Зазначимо, що поверхні, одержані внаслідок випадкового перенесення, є самоафінними і задовольняють масштабне (скейлінгове) співвідношення

$$Z(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{H} Z(x, y).$$
(2.5)

У попередньому прикладі показник H = 1/2.

Розглянемо ще один метод побудови фрактальних поверхонь — алгоритм випадкового додавання. Побудуємо фрактальну поверхню Z(x,y) на ділянці  $x \in [0,1]$ ,  $y \in [0,1]$ . Як генератор оберемо поверхню Z(x,y) = 0. Для побудови поверхні необхідно задати генератор випадкових чисел  $\xi$  з нульовим середнім значенням ( $\langle \xi \rangle = 0$ ) та дисперсією, яка залежить від *n*-го кроку ітерації за законом  $\langle \xi^2 \rangle = 2^{-nH}$ , де параметр  $0 \le H \le 1$  — деяка стала.

У нульовому поколінні отримаємо одне випадкове значення із набору з одиничною дисперсією і визначимо функцію поверхні таким чином: задамо значення функції у вибраних точках так:

$$Z(0, 0) = Z(0, 1) = Z(1, 0) = Z(1, 1) = 0, \ Z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \xi$$
, а значення

функції в інших точках отримаємо як результат лінійної інтерполяції за формулою  $Z\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left[Z(0,0) + Z\left(\frac{1}{2},0\right) + Z\left(0,\frac{1}{2}\right) + Z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$  для внутрішніх точок, та за формулою:  $Z\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[Z\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) + Z\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right]$  для точок на границі області.

У першому поколінні функція поверхні визначається додаванням 13 випадкових значень є з відповідною дисперсією до значень функції у точках, одержаних у попередньому поколінні. Тобто у першому поколінні функція поверхні задана своїми значеннями лише у 13 точках. На кожному кроці застосування алгоритму випадкового додавання кількість точок, де визначена функція поверхні, збільшується, а відстань між цими точками зменшується у  $\sqrt{2}$  разів. Алгоритм може застосовуватися до нескінченності. Фрактальна розмірність отриманої поверхні визначається за значенням показника H та становить D = 3 - H. Як і у випадку поверхні випадкового перенесення, поверхня, отримана за алгоритмом випадкового додавання, є самоафінною, а функція поверхні задовольняє рівняння (2.5) з відповідним H. В обох випадках, якщо перерізати побудовані поверхні площиною z = const, можна отримати фрактальні лінії з розмірністю D == 2 - H.

# РОЗМІРНІСТЬ ТА МІРА

Розділ З

Фрактальні об'єкти, розглянуті у розділі 2, можна інтерпретувати як множини точок D-мірного евклідового простору. Топологічна розмірність  $D_{\rm T}$  є однією з характеристик таких множин.

Одразу зазначимо, що і розмірність евклідового простору D, і топологічна розмірність  $D_{\rm T}$  ніяким чином не пов'язані із самоподібністю множин. Характеристиками самоподібності, як було показано вище, слугують фрактальні розмірності (розмірність самоподібності (див. параграф 1.2); розмірність Хаусдорфа—Безіковича (див. параграф 3.3); кореляційна, інформаційна та інші види розмірностей, властивості яких буде описано у параграфі 3.5). Однак поняття фрактальної (дробової) розмірності базується на понятті топологічної (цілої) розмірності.

Окрім того, у цьому розділі буде розглянуто поняття міри, необхідне як для метричного визначення топологічної розмірності, так і для розгляду основного поняття теорії фракталів розмірності Хаусдорфа—Безіковича. В останніх параграфах буде розглянуто особливості міри у так званих ультраметричних просторах, які, як і фрактали, мають яскраво виражену ієрархічну структуру.

#### 3.1. ТОПОЛОГІЧНА РОЗМІРНІСТЬ

До базових понять топології, які будуть використовуватись далі, слід віднести такі поняття як неперервність, відображення та гомеоморфізм. Коротко зупинимось на цих поняттях.

Неперервність — одне з найважливіших понять не тільки топології, а й математичного аналізу — розглядається з точки зору двох основних концепцій: неперервність множини та неперервність функції (або відображення).

Множину, яка має певні властивості неперервності, називають континуумом. Одним з прикладів найбільш вивченого у математиці неперервного утворення є система дійсних чисел — числовий континуум. Властивості неперервності можна характеризувати різними способами. Найбільш поширений, коли за основне поняття обирається поняття нерівності. Тоді неперервність числового континуума характеризується такими двома положеннями (на прикладі числового континуума): 1) між будьякими двома числами *a* < *b* знаходиться, принаймні, ще одне число c, що задовольняє нерівність: a < c < b; 2) якщо всі числа розбиті на два класи A і B так, що кожне число  $a \in A$  менше ніж будь-яке число  $b \in B$ , то або у класі  $A \in$  найбільше число, або у класі  $B \in$  найменше число. У топології властивості неперервності формулюються складніше, шляхом узагальнення щойноозначених положень неперервності множини дійсних чисел. Прикладом континуума, що лежить на числовій прямій, є відрізок множина точок x, які задовольняють нерівності  $a \le x \le b$ .

Під неперервною функцією в математичному аналізі розуміють функцію, яка отримує нескінченно малий приріст при нескінченно малому прирості аргументу. У топології розглядаються функції більш загального виду. Задати функцію — це значить задати закон, за яким кожній точці множини X (області визначення функції) ставиться у відповідність певна точка  $y = f(x \in X)$  деякої іншої множини Y (область значень функції). У цьому випадку також говорять, що задано відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y (записується як  $f: X \to Y$ ). Відображення  $f: X \to Y$  буде неперервним, якщо для будь-якої точки  $x \in X$  і для всякого околу V = V(f(x)) її образу f(x) існує такий окіл U = U(x) вихідної точки x, що  $f(U.) \in U$ . Це визначення є перефразуванням визначення неперервності функції дійсної змінної, коли використовується поняття околу.

Відображення називається взаємно однозначним, якщо для довільних двох точок  $x_1, x_2 \in X$  з рівняння  $f(x_1) = f(x_2)$  випливає  $x_1 = x_2$ . При взаємно однозначному відображенні  $f: X \to Y$  у кожну точку множини Y відображується тільки одна точка множини X Це означає, по-перше, що ніякі дві різні точки множини X не переходять в одну й ту саму точку множини Y (не "склеюються"), по-друге, що множина X відображується на всю множину Y, а не на її частину, у такий спосіб, що кожна точка множини Y обов'язково ставиться у відповідність деякій точці множини X Для будь-якого взаємно однозначного відображення  $f: X \to Y$  можна визначити обернене відображення  $f^{-1}: Y \to X$ , яке кожній точці  $y \in Y$  ставить у відповідність таку точку множини X, що y = f(x).

Гомеоморфізм — одне з основних понять топології. Два простори називаються гомеоморфними, якщо існує взаємно однозначне неперервне відображення одного з них на інший, для якого обернене відображення так само неперервне. Наприклад, будь-яке коло гомеоморфне будь-якому квадрату, два довільних відрізки гомеоморфні, але відрізок не гомеоморфний ні колу, ні прямій. При гомеоморфізмі відображення однієї множини на іншу відбувається без розривів та "склеювань". Поняття гомеоморфізму є окремим випадком більш загального поняття ізоморфізму, яке стосується систем об'єктів із заданими між ними операціями та співвідношеннями і характеризує "однаковість" внутрішньої побудови ізоморфних систем.

Перейдемо до визначення топологічної розмірності.

Ще до того як було введене поняття топологічної розмірності, існувало її фізичне трактування як кількості ступенів вільності. Зокрема, під розмірністю лінійного векторного простору розуміють максимально можливу кількість лінійно незалежних векторів. Тобто, відрізок прямої або коло (лінії) — одновимірні (мають топологічну розмірність  $D_{\rm T} = 1$ ), ділянки площини або сфери (поверхні) — двовимірні ( $D_{\rm T} = 2$ ), простір або куля (тіла) тривимірні ( $D_{\rm T} = 3$ ) і т. ін. Це означає, що положення будь-якої точки на лінії можна задати однією координатою, на поверхні двома, у просторі — трьома. Така величина, як кількість координат не може бути дробовою, тому топологічна розмірність є натуральним числом. В основі зазначеного трактування — уявлення Евкліда про те, що одно- та двовимірні утворення є частинами простору, у яких два або один характерні розміри достатньо малі (згідно з визначеннями Евкліда, лінія має довжину і не має ширини, поверхня має довжину та ширину і не має висоти).

Однак поняття топологічної розмірності, запропоноване у такий спосіб, є суперечливим. Зокрема, відкриття кривої Пеано (неперервне відображення відрізка на квадрат) суперечить положенню, згідно з яким розмірність простору може бути визначена як найменше ціле число неперервних дійсних параметрів, потрібних для його опису. Це означає також, що топологічна розмірність, запропонована у такий спосіб, не є інваріантною величиною (вона може змінюватись при однозначних неперервних відображеннях).

Розглянемо принцип побудови кривої Пеано. Будемо називати кривою Пеано траєкторію, яка проходить через кожну точку



РИС. 3.1. Алгоритм побудови лінії Пеано

квадрата. Для отримання такої траєкторії побудуємо у квадраті лабіринти згідно з таким алгоритмом: на *n*-му кроці розділимо вихідний квадрат на  $2^n$  квадратів та вилучимо деякі з їх сторін. Перегородки, які залишаються на *n*-му кроці побудови, зберігаються у наступних кроках. При  $n \to \infty$  середня лінія отриманого лабіринту буде траєкторією, що повністю заповнює вихідний квадрат, — це і є крива Пеано. Перші чотири кроки побудови ви кривої Пеано зображено на рис. 3.1.

Визначимо криву Пеано точніше. Для цього розглянемо неперервне відображення відрізка [0, 1] на побудовану раніше ламану лінію при n = 1. При такому відображенні відрізок [0, 1/4] відображується на частину цієї ламаної, яка лежить у лівій нижній чверті вихідного квадрата; відрізок [1/4, 1/2] — на частину, яка лежить у лівій верхній чверті; відрізки [1/2, 3/4] та [3/4, 1] на частини, які лежать у правих (верхній і нижній) чвертях. Позначимо це відображення так:  $f_1(t)$  ( $0 \le t \le 1$ ). Відображення відрізка [0, 1] на ламану лінію при n = 2 позначимо як  $f_2(t)$ . При такому відображенні відрізки [0, 1/16], [1/16, 2/16], ..., [15/16, 1] відображаються на послідовні частини ламаної, які лежать у шістнадцяти квадратах на другому кроці розбиття квадрата. Аналогічно будуються наступні відображення  $f_n(t)$ .

64

Можна довести, що існує граничне відображення  $f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$ . Дійсно, візьмемо, наприклад, точку  $1/3 \in [0, 1]$ . Легко побачити, що через те, що  $1/3 \in [1/4, 1/2]$ , точка  $f_1(1/3)$  лежить у лівому верхньому квадраті розбиття при n = 1. Аналогічно, оскільки  $1/3 \in [5/16, 6/16]$ , точка  $f_2(1/3)$  лежить у шостому квадраті розбиття при n = 2 (квадрати нумеруються так, як їх пробігає ламана — середня частина побудованого на *n*-му кроці лабіринту). Зрозуміло, що границя цієї послідовності квадратів-розбиттів (вкладених послідовно один в один), розмір яких зменшується на кожному кроці, є ліва верхня вершина квадрата, на яку й відображається точка 1/3 вихідного відрізка. У такий спосіб визначається точка граничного відображення f(t) для будь-якого  $t \in [0, 1]$ .

Отримане граничне відображення f(t), яке ставить у відповідність точкам відрізка [0, 1] точки квадрата, і називається кривою Пеано. Крива Пеано має нескінченно багато точок склеювання — точок, через які траекторія f(t) проходить більш ніж один раз. Зокрема, можна довести, що у квадраті є точки, через які крива Пеано проходить чотири рази, але немає точок, через які вона проходить більше чотирьох разів. Таким чином, дане відображення відрізка на квадрат, хоч і має властивість неперервності, не є гомеоморфним, тому що не виконана умова взаємної однозначності.

Спосіб побудови лінії Пеано не є чимось химерним. Розглянемо, наприклад, способи (певною мірою гіпотетичні) визначення адреси чи ідентифікації людини. Звісно, можна було б використовувати як адресу номер телефону або ідентифікаційний номер. У цьому випадку адресний простір одновимірний. Можна задавати таку адресу і за допомогою географічних координат квартири, де мешкає людина. Тоді адресний простір буде тривимірним. Але зазвичай це роблять інакше, задаючи назву країни, міста та вулиці, номери будинку та квартири. У цьому випадку отримуємо багатовимірний адресний простір.

Окрім своєї суперечливості, розглянуте вище поняття топологічної розмірності як кількості ступенів вільності, не дає змоги визначити розмірність множин більш загальної природи, зокрема множини Кантора.

Одне з означень топологічної розмірності дав П. Урісон. Це означення є топологічно інваріантним, тобто топологічно подібні (гомеоморфні) множини мають однакову топологічну розмірність. Щоб зрозуміти ідею П. Урісона, простежимо, як давні геометри вводили поняття трьох вимірів. Вони починали з поверхні як межі тіла, лінії як межі поверхні, точки як межі лінії і вважали, що цей процес не може тривати далі, тому що точку не можна далі розбити на складові. Але точка не є континуумом. Тоді лінії, які можна розбити множинами, які не є континуумами (точки), будуть називатись континуумами одного виміру; поверхні, які можна розбити неперервними множинами одного виміру (лініями), будуть континуумами двох вимірів; простір, який можна розбити неперервними множинами двох вимірів (поверхнями), буде континуумом трьох вимірів.

Для множин  $\Re$  довільної природи їх топологічна розмірність (за Урісоном)  $D_{\rm T} = \dim \Re$  будується за методом математичної індукції:

1. Рівняння dim $\Re = -1$  виконується тоді і тільки тоді, коли  $\Re = 0$  — порожня множина.

2. Множина  $\Re$  має розмірність нуль, якщо будь-яка її точка має скільки завгодно малий окіл, межа якого не має загальних точок з множиною  $\Re$ .

Прикладом множини з розмірністю нуль може слугувати множина  $\Im$  ірраціональних точок відрізка [0, 1]. Дійсно, для будьякої точки цієї множини можна вибрати скільки завгодно малий окіл, межі якого не належать множині  $\Im$ , тобто є раціональними числами. Таким чином, топологічна розмірність множини ірраціональних чисел дорівнює нулю dim $\Im = 0$ . Можна довести, що топологічна розмірність множини раціональних чисел також дорівнює нулю. Нульвимірною є й множина Кантора.

Якщо нульвимірна множина будується не на прямій, а на площині або в просторі, то під околом потрібно розуміти кола або кулі відповідно.

3. Множина  $\Re$  має розмірність одиницю, якщо вона не є порожньою множиною і не є нульвимірною, але для кожної її точки існує скільки завгодно малий окіл, межа якого в перетині з  $\Re$  є порожньою або нульвимірною множиною.

Усі звичайні лінії (як плоскі, так і просторові) мають топологічну розмірність, що дорівнює одиниці.

4. Далі за індукцією визначають множину розмірності 2, 3, ... і т. ін. Якщо множина розмірності *n* визначена, то можна ввести поняття множини розмірності *n*+1.

Множина  $\Re$  має розмірність n+1, якщо вона не є множиною розмірності меншою за n+1, і кожна її точка має скільки завгод-

но малий окіл, перетин межі якого з я має розмірність, яка не перевищує *n*.

Якщо множині  $\Re$  за вказаною вище процедурою не можна поставити у відповідність скінченне число *n*, то dim  $\Re = \infty$ .

За Менгером означення топологічної розмірності читається так: "Порожня множина має топологічну розмірність, що дорівнює –1. Розмірність множини  $\Re$  є таке найменше ціле число n, що кожна точка, яка належить  $\Re$ , має довільно малий окіл, межа якого має розмірність, меншу за n".

Наприклад, множина усіх дійсних чисел одновимірна, тому що кожна її точка має нескінченно малий окіл, межі якого є або ірраціональними, або раціональними числами, тобто належать множинам з топологічною розмірністю, що дорівнює нулеві.

Зазначимо, що множина не повинна бути обов'язково однорідною у топологічному розумінні. Введені вище означення топологічної розмірності (і за Урісоном, і за Менгером) мають локальні властивості. Існують множини, довільні підмножини яких мають довільні топологічні розмірності. У цьому випадку під топологічною розмірністю усієї множини прийнято розуміти найбільше із значень топологічної розмірності в кожній її точці.

Отже, підсумуємо різні означення топологічної розмірності. По-перше, топологічна розмірність порожньої множини  $\emptyset$  дорівнює  $D_{\rm T}(\emptyset) = -1$ . Будемо вважати, що топологічна розмірність  $D_{\rm T}$  визначена для будь-якої множини  $\Re$  як  $D_{\rm T}(\Re) \leq n - 1$  (n - ціле число). Тоді розмірність множини  $\Re$  із  $D_{\rm T}(\Re) \leq n$  визначимо за методом математичної індукції. А саме, для даної множини  $\Re$  існує відкрита множина V, яка задовольняє умови  $D_{\rm T}(\overline{V} - V) \leq n - 1$  та  $F \subset V \subset G$ , де F та G є відповідно будь-які відкрита і замкнена множини в  $\Re$ , які задовольняють умову  $F \subset G$ . (Зазначимо, що  $\overline{V}$  вказує на замкненість V.) Тобто, вважаючи  $D_{\rm T}(\Re) \leq n - 1$ , можна визначити  $D_{\rm T}(\Re) \leq n$ . Тепер знайдемо  $D_{\rm T}(\Re) = n$  для множини  $\Re$ , де  $\Re$  задовольняє умову  $D_{\rm T}(\Re) \leq n$  і не задовольняє умову  $D_{\rm T}(\Re) \leq n - 1$ . Як бачимо, за допомогою методу математичної індукції, можна визначити  $D_{\rm T}$  для будь-якого натурального числа n, починаючи від найменшої розмірності і використовуючи той факт, що границя n-вимірної множини,  $\overline{V} - V$ , є (n - 1)-вимірною множиною.

Таким чином, топологічна розмірність множини дорівнює нулю, якщо множину при неперервному відображенні можна перетворити в точку (або в множину ізольованих точок). Для множини, яка може бути трансформована в лінію, топологічна розмірність буде дорівнювати одиниці. Повертаючись до прикладів математичних фракталів, які розглянуто у розділі 2, бачимо, що топологічна розмірність множини Кантора дорівнює нулю, кривої Коха — одиниці, кривих Серпінського (хоча це і не очевидно) — так само одиниці. Топологічна розмірність множини є більш фундаментальним поняттям, ніж фрактальна розмірність, але фрактальна розмірність завжди більше або дорівнює топологічній розмірності.

#### 3.2. МЕТРИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ РОЗМІРНОСТІ

Індуктивні визначення топологічної розмірності (див. параграф 3.1) застосовувати досить складно. Тому було запропоновано визначення топологічної розмірності за допомогою покриттів, яке, однак, потребує розгляду, що таке міра. Поняття міри — узагальнене поняття відстані між елементами множини, які мають звичайні властивості відстані у тривимірному евклідовому просторі — займає важливе місце не тільки в топології й математиці, а й у сучасній теоретичній фізиці.

Визначимо поняття метричного простору. Для деякої множини  $\mathfrak{R}$  введемо дійсну невід'ємну функцію  $\rho(x, y)$ , де  $x, y \in \mathfrak{R}$ , яка задовольняє такі умови:

 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (аксіома тотожності),

 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксіома симетрії),

 $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z), x, y, z \in \Re$  (аксіома трикутника).

Таку функцію будемо називати метрикою, а множину  $\Re$  разом із метрикою — метричним простором. На одній і тій самій множині можуть бути введені довільні метрики. Наприклад, на множині усіх точок площини (x, y) як метрики можуть використовуватись або звичайна евклідова відстань  $\rho_1(a, b) =$ 

=  $\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ , або  $\rho_2(a, b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$ . На множині неперервних на відрізку [a, b] функцій як міра може використовуватись величина  $\rho_1(f, g) = \max_{x=l_a, b} |f(x) - g(x)|$  або ве-

личина  $\rho_2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ . Використовуючи визначення

метрики, можна ввести поняття діаметра множини. Під діаметром множини будемо розуміти максимально можливу відстань (метрику) між двома точками, які належать даній множині.

Припущення про те, що загальне поняття міри (наприклад, довжина, площа, об'єм і т. ін.) необхідне для дослідження розмірностей неперервних множин, уперше було висловлене Кантором, а потім розвинуте Лебегом. За допомогою свого визначення, Лебег, зокрема, довів твердження, що топологічна розмірність *n*-вимірного евклідового простору дорівнює *n*, і визначена у такий спосіб розмірність є топологічно інваріантною.

Лебег помітив, що відрізок можна розбити на скільки завгодно малі частини так, що кожна його точка буде належати не більш ніж двом частинам. Топологічна розмірність відрізка дорівнює одиниці. Квадрат можна розбити на частини так, що кожна його точка буде належати не більш ніж трьом довільним частинам. Таке розбиття буде мати вигляд цегляної кладки. Звичайно, можна придумати таке розбиття квадрата, де знайдуться точки, які належать чотирьом довільним частинам, однак таке визначення потребує пошуку розбиття з мінімальною кількістю частин, які межують із точкою. Тому розмірність квадрата вважають рівною двом. Аналогічно куб можна розбити на паралелепіпеди так, що кожна його точка буде належати не більш ніж чотирьом паралелепіпедам. Отже, розмірність куба дорівнює трьом. Подібним чином куб *n*-вимірного евклідового простору можна розбити на скільки завгодно малі цеглини так, щоб не більш ніж n + 1 цих цеглин перетиналися. Лебег висловив припущення, що це число (n + 1) не можна зменшити, повинна існувати точка, яка належить принаймні n + 1 цеглині. Визначення топологічної розмірності за Лебегом таке: мно-

Визначення топологічної розмірності за Лебегом таке: множина  $\Re$  має топологічну розмірність *n*, якщо *n* — таке найменше ціле число, що для довільного додатного є існує скінченна система замкнених множин з діаметрами, що не перевищують є і покривають множину  $\Re$ , жодні *n* + 2 з яких не мають спільної точки. Тобто, якщо множину  $\Re$  можна покрити скільки завгодно малими замкненими множинами так, що жодна точка  $\Re$  не належить *n* + 2 довільним частинам, але при будь-якому достатньо малому покритті знайдуться точки, які належать *n* + 1 довільній частині.

## 3.3. РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА-БЕЗІКОВИЧА. поняття міри

Топологічна розмірність завжди є натуральним числом. Виникає правомірне питання: чи можна узагальнити поняття розмірності так, щоб вона набула дробові значення.

тя розмірності так, щоб вона набула дробові значення. На існування дробових розмірностей у природних утвореннях наводять такі міркування. З одновимірними об'єктами пов'язане поняття довжини, із двовимірними — площі, тривимірними — об'єму. Ці об'єкти характеризує деяка конструкція, яка не ви-падково називається розмірністю фізичної величини (див. пара-граф 1.1). Однак розмірності фізичних величин бувають і дробо-вими, що не суперечить теорії розмірностей фізичних величин. Очевидно припустити, що такій фізичній величині з дробовою розмірністю відповідає деяке геометричне утворення, яке має пробову розмірність дробову розмірність.

Розвитком ідеї Лебега та її узагальненням став підхід Хаус-

Розвитком ідеі Лебега та ії узагальненням став підхід Хаус-дорфа до визначення розмірності множини метричного просто-ру. Розглянемо для цього методи вимірювання різного роду множин. Найбільш звичними мірами множини точок слугують довжини ліній, площини поверхонь, об'єми тіл. Один із методів вимірювання множини полягає в тому, щоб покрити множину, що розглядається, іншими множинами роз-міром η. Наприклад, відрізками, квадратами (або колами), куба-ми (або кулями) з довжиною ребра (або діаметром), рівним η. За допомогою такого розбиття вихідній множині можна поставити у відповідність деяку міру. Так криву можна покрити відрізками відповідність деяку міру. Так, криву можна покрити відрізками довжиною  $\eta$  і підрахувати число таких відрізків  $N(\eta)$ . Тоді для довжини L кривої можна записати

$$L=\lim_{\eta\to 0}N(\eta)\eta.$$

Можна спробувати визначити і площу Ѕ кривої. Для цього треба підрахувати кількість квадратів  $N(\eta)$  з довжиною ребра  $\eta$ , що необхідні для її покриття. У цьому випадку маємо

$$S = \lim_{\eta \to 0} N(\eta) \eta^2 \, .$$

Аналогічно для об'єму И кривої отримуємо

$$V = \lim_{\eta \to 0} N(\eta) \eta^3,$$

де  $N(\eta)$  — кількість кубів з довжиною ребра  $\eta$ , які покривають вихідну криву.
Очевидно, що для звичайної кривої  $N(\eta) = L_0/\eta$ . Отже,  $L = L_0$ , S = 0, V = 0, і єдиною змістовною мірою для неї є довжина.

Неважко помітити, що для поверхні кількість квадратів, необхідних для її покриття, визначається виразом  $N(\eta) = S_0/\eta^2$ . У зв'язку з цим  $S = S_0$ , V = 0. Формально за запропонованою вище формулою поверхні можна поставити у відповідність і деяку довжину, однак її значення розбігається при  $\eta \rightarrow 0$ . Це очевидний результат, тому що поверхню неможливо покрити скінченним числом прямолінійних відрізків. Таким чином, єдиною змістовною мірою звичайної поверхні у тривимірному просторі є її площа. Такі самі міркування приводять нас до висновку, що єдиною змістовною мірою тіл є об'єм.

Узагальнимо поняття міри множини.

Для визначення міри множини точок  $\Re$  виберемо деяку пробну функцію  $h(\eta) = \gamma(d)\eta^d$  — відрізок, квадрат (коло) або куб (куля) — і покриємо нею множину  $\Re$ , утворюючи її міру  $M_d = \sum h(\eta)$ . У цьому виразі підсумовування відбувається на частинах покриттів, що не перетинаються, тобто перетин покривних елементів враховується один раз. Коефіцієнт  $\gamma(d)$  залежить від геометричних властивостей покривних елементів. Для відрізка  $\gamma(d) = 1$ , для кола  $\gamma(d) = \pi/4$ , для кулі  $\gamma(d) = \pi/6$ . Величина d називається розмірністю міри. Як було показано вище, величина  $M_d$  при  $\eta \to 0$  може дорівнювати нулю, нескінченності або приймати скінченні значення залежно від величини d.

Розмірність Хаусдорфа  $D_H$  множини точок  $\Re$  є критична розмірність d міри  $M_d$ , при якій міра приймає скінченне значення:

$$H_{d} = \lim_{\eta \to 0} M_{d} = \lim_{\eta \to 0} \sum \gamma(d) \eta^{d} = \lim_{\eta \to 0} \gamma(d) N(\eta) \eta^{d} = \begin{cases} 0, d > D_{H} \\ \text{const, } d = D_{H} \\ \infty, d < D_{H} \end{cases}$$
(3.1)

Величину  $H_d$  називають мірою Хаусдорфа множини точок  $\Re$ . Якщо такого числа  $d = D_H$  не існує, то тоді використовують число  $D_{HB} = \inf [d: H_d = 0]$ , яке називають розмірністю Хаусдорфа— Безіковича. Таким чином, при  $d = D_{HB}$  величина  $H_d$  змінює своє значення стрибком (від нуля до нескінченності).

Зупинимося на деяких особливостях розмірності Хаусдорфа— Безіковича.

По-перше, центральне місце у визначенні розмірності Хаусдорфа—Безіковича займає поняття відстані між точками, тобто це поняття є метричним. Унаслідок цього величина  $D_{HB}$  може змінюватись при зміні метрики. Нижня межа розмірностей Хаусдорфа—Безіковича для всіх метрик, які можна ввести на множині  $\mathfrak{R}$ , дорівнює її топологічній розмірності. Отже, справедливе співвідношення  $D_{\mathsf{T}}(\mathfrak{R}) \leq D_{HB}(\mathfrak{R})$ .

По-друге, розмірність *D<sub>нв</sub>* інваріантна відносно перетворення подібності. Отже, геометрично подібні множини мають однакову розмірність Хаусдорфа—Безіковича.

По-третє, *D<sub>HB</sub>* не є топологічним інваріантом (тобто існують приклади гомеоморфних множин, які мають різну розмірність Хаусдорфа—Безіковича).

По-четверте, розмірність Хаусдорфа—Безіковича монотонна, тобто якщо  $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2$ , то  $D_{HB}(\mathfrak{R}_1) \leq D_{HB}(\mathfrak{R}_2)$ . У більш загальному випадку об'єднання множин для розмірності Хаусдорфа—Безіковича справедливе співвідношення

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}}\left(\bigcup_{n}\mathfrak{R}_{n}\right)=\sup_{n}D_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}}\left(\mathfrak{R}_{n}\right).$$

По-п'яте, розмірність  $D_{HB}$  характеризує властивості множини точок при зникаюче малому розмірі  $\eta$  пробної функції, яка ви-користовується для покриття. Отже, це локальна властивість.

Як приклад, визначимо розмірність Хаусдорфа—Безіковича для розглянутої у параграфі 2.1 тріадної кривої Коха. Число сегментів кривої з довжиною  $\eta$  (на відповідному кроці побудови) визначається виразом  $N(\eta) = \eta^{-D}$ , де  $D = \ln 4/\ln 3$ . Вибиремо пробну функцію такого вигляду:  $h(\eta) = \eta^d$ . У цьому випадку міра  $M_d = N(\eta)h(\eta) = \eta^{-D}\eta^d$ . Очевидно, що критичне значення d, при якому величина міри  $M_d$  залишається скінченною при скільки завгодно малому значенні  $\eta$ , є D. Отже,  $D_{HB} = D$ .

Таке саме доведення можна провести для множини Кантора та інших детермінованих фрактальних множин, які розглянуто у розділі 2.

Розглянуті у цьому розділі поняття топологічної розмірності і розмірності Хаусдорфа—Безіковича дозволяють визначити фрактал як множину точок, розмірність Хаусдорфа—Безіковича якої строго більше за її топологічну розмірність.

# 3.4. ДЕРЕВО КЕЙЛІ. УЛЬТРАМЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР. МІРА В УЛЬТРАМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Алгоритм побудови детермінованих фрактальних множин можна подати у вигляді генеалогічного дерева — дерева Кейлі. Кожній фрактальній множині відповідає гомеоморфне йому де-



рево Кейлі. Як і раніше, під гомеоморфізмом (топологічною еквівалентністю) двох множин розуміється таке відображення однієї множини на іншу, що відбувається без розривів та склеювань.

Дерево Кейлі — це схематичне зображення деякого простору, що називається ультраметричним. Кожній точці такого простору, згідно з описаним вище поняттям гомеоморфізму, можна поставити у відповідність елемент деякої фрактальної множини. Важливість концепції ультраметричного простору, як і фрактальної множини, полягає в тому, що вони відображають ієрархічну структуру тих систем, яким відповідають.

Введемо поняття відстані (метрику) в ультраметричному просторі. Для цього розглянемо найпростіше одновимірне дерево Кейлі, яке має n = 2 рівня ієрархії і гіллястість j = 4 (рис. 3.2).

Точками ультраметричного простору є кінці паростків дерева Кейлі на відповідному рівні. Кількість цих точок дорівнює  $M = j^n$ . Кожну точку такого простору можна пронумерувати, а номерами будуть слугувати *n*-значні числа в *j*-ричній системі числення:  $a_1a_2...a_n$ ,  $0 \le a_l \le j - 1$ ,  $1 \le l \le n$ . Фактично у такий спосіб в ультраметричному просторі вводиться поняття координат.

Під відстанню між будь-якими двома точками в ультраметричному просторі (ультраметричною відстанню) будемо розуміти кількість кроків d від цих точок до їх спільного попередника. У загальному випадку d набуває цілочисельні значення, а d = 0 є відстань від будь-якої точки до неї самої. Розглянемо дві точки з ультраметричними координатами  $a_1a_2...a_n$  та  $b_1b_2...b_n$ . Якщо  $a_i = b_i$ , i = 1, ..., n, то відстань між цими точками дорівнює нулю. Якщо  $a_i = b_i$ , i = 1, ..., n - 1, а  $a_n \neq b_n$ , то відстань між точками дорівнює 1. У загальному випадку, якщо  $a_i = b_i$ , i = 1, ..., n - d, а  $a_{n-d+1} \neq b_{n-d+1}$ , то відстань між цими точками дорівнює d. Таким чином, відстань між двома точками в ультраметричному просторі, координати якого задані за допомогою *n*-значних чисел в *j*-ричній системі числення, залежить тільки від того, в якому з розрядів ці числа вперше відрізняються один від одного, і не залежить від їх конкретних значень.

Найважливішою властивістю ультраметричного простору є правило трикутників, згідно з яким точки ультраметричного простору не можуть утворювати трикутники, всі сторони яких різняться, тобто в ультраметричному просторі існують тільки рівнобедрені та рівнобічні трикутники. Наприклад, точки 00, 10, 11 утворюють рівнобедрений трикутник, а точки 10, 11, 12 або 00, 11, 22 — рівнобічні трикутники.

Ультраметричний простір відображає ієрархічну структуру системи, якій він відповідає. Дійсно, M точок дискретного ультраметричного простору (вузлів дерева Кейлі на *n*-му кроці) розбиті на *n*+1 груп. Кожна з таких груп складається з ієрархічних угруповань точок, які характеризуються однаковим значенням  $\ell$ максимальної відстані між ними. Таким чином, ультраметричний простір можна розглядати як групу, що складається з  $j^n = M$ поодиноких вузлів, для яких  $\ell = 0$ . З іншого боку, можна виділити угруповання, вузли яких розділені відстанню  $\ell = 1$  (чотири угруповання 00, 01, 02, 03; 10, 11, 12, 13; 20, 21, 22, 23; 30, 31, 32, 33 на рис. 3.2). Будь-яке таке угруповання складається з j точок, а число таких угруповань дорівнює  $j^{n-1}$ . Довільній відстані  $\ell$ відповідає група з  $j^{n-\ell}$  угруповань, кожне з яких вміщує  $j \cdot \ell$  точок ультраметричного простору. Ці точки згруповані в j підугруповань, що відповідають відстані  $\ell - 1$  і т. ін.

Найважливішою властивістю ультраметричного простору є те, що він реалізує логарифмічну метрику для фізично спостережуваних величин. Це означає, що в такому просторі відстань  $\ell \in$ лінійною функцією фізично спостережуваної величини  $\rho$ .

Розглянемо граничний перехід до континуального ультраметричного простору. Для цього будемо нескінченно збільшувати

кількість рівнів  $(n \to \infty)$  або гіллястість  $(j \to \infty)$  дерева Кейлі. У цьому випадку число точок, які потрапляють на рівень *n*, настільки велике, що інтервал, який розділяє точки вихідного дискретного простору, стає зникаюче малим, а сам простір — континуальним. У цьому випадку введена раніше відстань  $\ell$  стає неперервною величиною.

Поставимо у відповідність кожній точці ультраметричного простору деяку координату  $r_a$ , яка змінюється на інтервалі [-M/2, +M/2]:

$$r_a = -M_1 / 2 + a_1 j^{n-1} + a_2 j^{n-2} + \dots + a_n j^{n-n}$$

Фактично у такий спосіб ми побудували відображення ультраметричного простору на звичайний евклідовий.

Введемо поняття відстані в одновимірному евклідовому просторі:

$$\rho(a,b) = |r_a - r_b| = |(a_1 - b_1)j^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})j + (a_n - b_n)|.$$

Оскільки внаслідок ієрархічності структури ультраметричного простору будь-які дві довільні його точки належать до якогонебудь одного угруповання, яке характеризується відстанню  $\ell \le n$ , перші  $n - \ell$  доданки отриманого розкладу дорівнюють нулю, тому що  $a_i = b_i$ ,  $i = 1,...,n - \ell$ . Оскільки ми розглядаємо континуальний ультраметричний простір, то j >> 1. Внаслідок цього усіма членами ряду, що мають множник  $j^k$ ,  $k = \ell - 1, ..., 0$ , можна знехтувати порівняно з доданком, який має множник  $j^{\ell}$ . Отже, у розкладі залишається лише один доданок:

$$\rho(a, b) \approx |(a_{n-1} - b_{n-1})j^{\ell}| \le j^{\ell+1}.$$

Остання нерівність виконується тому, що  $a_i$  і  $b_i$  — цифри в *j*-ричній системі числення ( $|a_i - b_i| \le j$ ).

Таким чином, вихідний ряд, який визначає відстань між точками, з логарифмічною точністю зводиться до такого вигляду:

$$\ln \rho(a,b) \approx (\ell+1) \ln j \approx \ell \ln j, \ j,\ell >> 1.$$

Отже, в ультраметричному просторі відстань  $\ell$  є лінійною функцією логарифма спостережуваної величини  $\rho$ . Оскільки використовувати величину  $\ln \rho$  менш зручно, ніж  $\ell$ , то замість звичайної осі координат зручніше ввести ультраметричний простір, і всі викладки для досліджуваної системи проводити у цьому просторі.

ЧАСТИНА 1. Основні положення фрактальної геометрії



Розглянуте дерево Кейлі є однорідним деревом, тобто деревом з однаковою гіллястістю в усіх вузлах. Зрозуміло, що ультраметричний простір, побудований за допомогою такого однорідного дерева Кейлі, буде самоподібною множиною з розмірністю подібності  $D_s = 1$  (параметр подібності  $r = j^{-1}$  і для генерації нового покоління необхідно використати *j* зменшених в *r* разів копій дерева Кейлі у попередньому поколінні). Дробова розмірність  $D_s < 1$  спостерігається лише в тому випадку, якщо на кожному кроці побудови дерева Кейлі гіллястість частини його вузлів буде зменшуватись. Обернений випадок  $D_s > 1$  для одновимірного дерева Кейлі існує, якщо зв'язуються не тільки найближчі ієрархічні рівні, а й віддалені, як це зображено на рис. 3.3. Тут отриманий ультраметричний простір буде описувати поведінку немарковської ієрархічної системи, що володіє пам'яттю.

## 3.5. РІЗНІ ВИДИ ФРАКТАЛЬНИХ РОЗМІРНОСТЕЙ

У попередніх розділах мірою фрактальної розмірності слугували такі величини, як розмірність D (1), що розраховувалася за підрахунками покривних комірок, розмірність самоподібності  $D_s$  (1.11) і розмірність Хаусдорфа—Безіковича  $D_{HB}$  (3.1). Однак ці розмірності мають ряд недоліків. Зокрема, знаходження  $D_s$  і  $D_{HB}$  можливе тільки для точно означених математичних фракталів і неможливе для реальних фізичних об'єктів, що мають фрактальні властивості.

Розмірність D уможливлює обчислення фрактальної розмірності фізичних фракталів, однак підрахунок покривних комірок потребує значних витрат обчислювального часу. Для розмірності D часто використовується назва "клітинкова розмірність", "коміркова розмірність" та "ємнісна розмірність" або "ємність" (оскільки вона певним чином характеризує вміст конструктивних елементів — атомів, мономерів і т. ін. — у фракталі, що розглядається). Для клітинкової, коміркової і ємнісної розмірностей використовують позначення  $D_c$  (cells, capacity), а для їх обчислення формулу (1).

Усі три розглянуті розмірності ( $D_s$ ,  $D_c$ ,  $D_{HB}$ ) є геометричними мірами, які не враховують можливого неоднорідного розподілу шуканої величини на фрактальній множині та міру цієї величини, що потрапила в елемент покриття. Наприклад, при обчисленні фрактальної розмірності ліній (одновимірних, з точки зору топології, утворень у тривимірному просторі) припускалось, що точки, які утворюють лінію, розподілені уздовж неї рівномірно і що досліджувана лінія потрапляє в елемент покриття тільки один раз. Тобто, кількість точок у кожному елементі покриття, який містить у собі лінію, в середньому однакова.

У цьому розділі буде розглянуто альтернативні методи обчислення міри фрактальної розмірності, які усувають недоліки, притаманні розмірностям  $D_s$ ,  $D_c$ ,  $D_{HB}$ , а також співвідношення між цими мірами.

### 3.5.1. Поточкова розмірність

Визначимо поточкову розмірність для фрактальної лінії у тривимірному просторі. Для цього розглянемо достатньо велику дискретну вибірку точок, які належать до досліджуваної неперервної лінії. На практиці в більшості випадків робити таку дискретизацію немає потреби, оскільки експериментальні лінії, як правило, задаються дискретним набором точок. Нехай маємо  $N_0$  точок, заданих векторами  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, ..., N_0$ . Навколо будь-якої точки *i* опишемо сферу радіусом *r* і підрахуємо число точок  $N(r, \vec{r}_i)$ , що задають лінію і потрапили до сфери. (Замість сфери можна розглядати куб з ребром *r*.)

Имовірність того, що точка потрапила в середину сфери, дорівнює

$$P(r, \vec{r}_i) = N(r, \vec{r}_i) / N_0.$$
(3.2)



РИС. 3.4. Визначення поточкової розмірності фрактальної кривої

Очевидно, що у випадку рівномірного розподілу точок уздовж звичайної (нефрактальної) лінії, введена вище ймовірність є лінійною функцією r при  $r \rightarrow 0$ ,  $N_0 \rightarrow \infty$ . У випадку фрактальної лінії вона може потрапляти у сферу декілька разів, як це показано на рис. 3.4. У цьому випадку ймовірність (3.2) перестає бути лінійною функцією сфери радіусом r. Наприклад, у випадку трикутного невода (див. параграф 3.2) або лінії Пеано (див. параграф 3.1) ймовірність (3.2) знайти точку лінії у сфері пропорційна  $r^2$ .

Таким чином, розмірність лінії в *і*-й точці

$$D_P(\vec{r}_i) = \lim_{r \to 0} \frac{\ln P(r, \vec{r}_i)}{\ln r}$$

і характеризує міру лінії, яка міститься всередині сфери малого радіуса. У загальному випадку значення поточкової розмірності залежить від точки, в якій вона обчислена. Крім того, для множин, у розподілі точок яких трапляються щілини (наприклад, канторівська множина) ймовірність (3.2) перестає бути неперервною функцією *г*. У цьому випадку користуються усередненою поточковою розмірністю:

$$D_{P} = \frac{1}{N_{0}} \sum_{i=1}^{N_{0}} \bar{D}_{P}(\bar{r}_{i}).$$
(3.4)

Усереднення можна здійснювати й іншими способами. Наприклад, щоб усереднювати ймовірності (3.2), вибирають випадкову підмножину з  $M << N_0$  точок на лінії, тоді для усередненої поточкової розмірності:

$$D_{P} = \lim_{r \to 0} \frac{\ln \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} P(r, r_{j})}{\ln r}.$$
 (3.5)

Можна проводити усереднення й за радіусами сфер, які вміщують одне й те саме число N точок. У цьому випадку навколо кожної точки вибірки з M точок будують сфери радіусом  $r_j(N)$ так, щоб усередині їх вміщувалась одна й та сама кількість точок  $N_i$  і визначають середній радіус:

$$\bar{r}(N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} r_j(N).$$

Оскільки фракталам властива подібність  $N_i \sim \bar{r}^{D_p}$ , усереднена поточкова фрактальна розмірність визначається кутом нахилу графіка  $\bar{r}(N)$ , побудованого у подвійному логарифмічному масштабі:

$$D_{P} = \lim_{N \to 0} \frac{\ln N}{\ln \bar{r}(N)} \,. \tag{3.6}$$

Поточкова фрактальна розмірність (3.3)—(3.6) залежить від вибору точок, що задають лінію. Ця характеристика може бути використана для опису всіх величин, що неоднорідно розподілені на фрактальних множинах. Для однорідних детермінованих фрактальних ліній, таких як крива Коха, лінії Серпінського та ін., при рівномірному розподілі точок  $D_P = D_C$ .

### 3.5.2. Кореляційна розмірність

Як і в попередньому пункті, дискретизуємо досліджувану неперервну лінію — замінимо її множиною точок  $\{\vec{r}_i\}, i = 1, ..., N_0$ . Обчислимо відстань між парами точок  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  і визначимо кореляційну функцію:

$$C(\mathbf{r}) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{1}{N_0^2} \sum_{i,j=1}^{N_0} \Theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij}), \qquad (3.7)$$

де  $\Theta(r)$  — функція Хевісайда.

Кожна пара точок при підсумовуванні в (3.7), для яких  $r_{ij} \leq r$ , дає внесок у суму, що дорівнює одиниці, а внесок точок з  $r_{ij} > r$  в суму дорівнює нулю.

Для фрактальних кривих кореляційна функція (3.7) при малих *r* залежить від *r* згідно зі степеневим законом, тому кореляційна розмірність визначається за формулою

$$D_G = \lim_{r \to 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}.$$
 (3.8)

Неважко помітити, що при обчисленні кореляційної функції відповідно до формули (3.7), навколо кожної точки вихідної мно-

жини можна описати сферу і підрахувати число точок у кожній сфері. Це значення відрізняється від усередненої поточкової розмірності тим, що в (3.7) підсумовування виконується навколо кожної точки множини, а в (3.5) — навколо точок деякої підмножини. Таким чином, для однорідних неперервних фрактальних ліній, для яких поточкова розмірність (3.3) збігається з усередненою поточковою розмірністю (3.5), виконується співвідношення  $D_G \leq D_P$ .

У загальному випадку кореляційна розмірність і розмірність Хаусдорфа—Безіковича пов'язані співвідношенням  $D_G \leq D_{HB}$ . Кореляційна розмірність залежить від розподілу густини точок на фрактальному об'єкті, у той час як розмірність Хаусдорфа-Безіковича залежить тільки від геометрії множини. Основний внесок у розмірність Хаусдорфа-Безіковича дає найбільш порізана частина об'єкта, оскільки для її покриття вимагається найбільше число покривних елементів. Якщо розклад точок уздовж об'єкта має низьку щільність в цій найбільш порізаній частині, то вона не дасть суттєвого внеску в кореляційну розмірність. Таким чином, кореляційна розмірність обмежується зверху розмірністю Хаусдорфа-Безіковича. Рівність цих двох розмірностей досягається у тому випадку, коли щільність точок, які використовуються для обчислення кореляційної розмірності, однорідно розподілена на фрактальному об'єкті.

У загальному випадку кореляційна функція  $C(\vec{R})$  є усередненою за об'ємом ймовірністю виявлення деякого елемента множини у точці простору, що зміщена відносно заданого елемента на вектор  $\vec{R}$ . Якщо задана неперервна густина розподілу деякої величини в просторі  $\rho(\vec{r})$ , то кореляційна функція визначається співвідношенням

$$C\left(\vec{R}\right) = \frac{\int \rho\left(\vec{r} + \vec{R}\right)\rho\left(\vec{r}\right) d\vec{r}}{\int \rho^{2}\left(\vec{r}\right) d\vec{r}} .$$
(3.9)

У випадку фрактального розподілу розглянутої величини у просторі з розмірністю d (саме за цим простором і відбувається усереднення в (3.9), тобто всі інтеграли є d-кратними), кореляційна розмірність  $D_G$  може бути визначена за допомогою спів-

відношення:

$$C(\bar{R}) \sim R^{d-D_G}. \qquad (3.10)$$

### 3.5.3. Інформаційна розмірність

Інформаційна розмірність — одне з означень фрактальної розмірності, аналогічне ємності, але з урахуванням частоти, з якою фрактальна лінія потрапляє в елемент покриття.

Для обчислення інформаційної розмірності вихідна множина точок покривається N кубами з ребром r. Як і в попередніх випадках, вихідна множина точок — це результат рівномірної дискретизації неперервної фрактальної лінії. Обчислимо ймовірність знайти точку множини в *i*-й комірці покриття:

$$P_i = \frac{N_i}{N_0}, \qquad (3.11)$$

де  $N_i$  — число точок в *i*-й комірці,  $N_0 = \sum_{i=1}^N N_i$  — повне число

точок вихідної множини.

Інформаційна ентропія визначається відповідно до виразу

$$I(r) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i .$$
 (3.12)

Якщо у визначенні (3.12) використовувати логарифм за основою 2, то інформаційна ентропія вимірюється в бітах. Ця величина є мірою непередбачуваності системи. Якщо для всіх комірок покривної множини заповнення їх точками вихідної множини рівноймовірно (хаотичний розподіл або максимальна непередбачуваність системи), то  $P_i = 1/N$ , а інформаційна ентропія відповідно з (3.12) набуває максимально можливе для даної системи значення  $I = \log N$ . Якщо усі точки вихідної множини зосередити в одній комірці покриття, наприклад у першій (максимальна передбачуваність), то  $P_1 = 1$ ,  $P_{i \neq 1} = 0$ , а I = 0. Таким чином, чим більша передбачуваність системи, тим менше значення інформаційної ентропії.

Інформаційна розмірність задається виразом:

$$D_{I} = \lim_{r \to 0} \frac{I(r)}{\log(1/r)} = \lim_{r \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} P_{i} \log P_{i}}{\log r}.$$
 (3.13)

81

Проаналізуємо зв'язок інформаційної та ємнісної розмірностей. Якщо б ймовірності  $P_i$  були рівні для усіх комірок, то, як зазначалось вище,  $I = \log N$ , де N — число комірок, які покривають вихідну множину. Після підстановки в (3.13) неважко помітити, що  $D_I = D_C$ . У загальному випадку, оскільки  $0 \le I(r) \le \log N$ , інформаційна розмірність та ємність зв'язані співвідношенням  $D_I \le D_C$ .

Крім того, можна показати, що між інформаційною (3.13) і кореляційною (3.8) розмірностями та ємністю (1) існує співвідношення:

$$D_G \leq D_I \leq D_C$$

#### 3.5.4. Розмірності Реньї

Ємнісна, інформаційна та кореляційна розмірності можна визначити в межах єдиного формалізму, якщо ввести поняття інформації порядку *q* (узагальнення ентропії):

$$I_q(r) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{N} P_i^q, \quad q = 0, \ 1, \ 2, \ ...,$$
(3.14)

де *P<sub>i</sub>* взято з формули (3.11). Аналогічно вираз (3.13) для фрактальної розмірності порядку *q* (розмірності Реньї) можна записати:

$$D_{q} = \lim_{r \to 0} \frac{I_{q}(r)}{\log(1/r)}.$$
(3.15)

При q = 0,  $I_0 = \log \sum_{i=1}^{N} P_i^0 = \log N$  і, отже,  $D_0 = D_C$ . Обчислимо  $D_1$ . Покладемо  $q = 1 + \varepsilon$  і  $\varepsilon \to 0$ . Тоді

$$I_1 = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \log \sum_{i=1}^N P_i^{1+\varepsilon} = -\sum_{i=1}^N P_i \log P_i .$$

Дійсно,

$$\ln \sum_{i} P_{i}^{1+\varepsilon} = \ln \left[ \left( \sum_{i} P_{i}^{1+\varepsilon} - 1 \right) + 1 \right] \approx \sum_{i} P_{i} P_{i}^{\varepsilon} - 1 =$$

$$= \sum_{i} P_{i} \exp[\varepsilon \ln P_{i}] - 1 \approx \sum_{i} P_{i} (1 + \varepsilon \ln P_{i}) - 1 = \varepsilon \sum_{i} P_{i} \ln P_{i},$$

оскільки  $\varepsilon \leq 1$ , a  $\sum_{i} P_i = 1$ .

Таким чином, інформація першого порядку  $I_1$  збігається з інформаційною ентропією (3.12) і  $D_1 = D_I$ .

При q = 2 маємо:

$$I_2 = -\log \sum_{i=1}^{N} P_i^2 = -\lim_{N \to \infty} \log 2NC(r),$$

де C(r) — кореляційна функція (3.7). У цьому випадку з точністю до логарифмічного доданку  $D_2 = D_G$ .

Розмірності Реньї (3.15) задовольняють співвідношення  $D_q \ge D_p$ , якщо q > p. Рівність досягається у випадку однорідних множин, тобто таких множин, для яких ймовірність (3.11) задовольняє закон подібності  $P_i(r) \sim r^D (D - будь-яка з фрактальних розмірностей), тобто для однорідних фракталів.$ 

Отже, розмірності Реныї можуть слугувати мірою ступеня неоднорідності розглянутого фрактала. Неоднорідні фрактали, які характеризуються набором різноманітних фрактальних розмірностей, можуть бути описані в рамках концепції мультифрактала, яка буде розглянута в розділі 4.

Таким чином, ємнісна розмірність (розмірність Реньї нульового порядку) не враховує розподілу точок множини між комірками, що покривають цю множину. Інформаційна розмірність (розмірність першого порядку) визначає ймовірність виявлення точки множини у комірці. Кореляційна розмірність (розмірність другого порядку) визначає ймовірність виявлення в одній і тій самій комірці покриття двох точок водночас.

У дослідженнях неоднорідних фракталів різні визначення фрактальної розмірності будуть давати різні результати. У випадку однорідних фракталів усі три визначення розмірності збігаються. Таким чином, для самоподібних детермінованих фракталів, таких як множина Кантора, крива Коха та ін., розглянуті розмірності збігаються. У цьому випадку говорять просто про фрактальну розмірність  $D = D_A$ , де A = S, H(HB), P, C, I, G.

### 3.5.5. Спектральна розмірність

Випадкові блукання, добре визначені у дискретному просторі і часі, можуть бути проаналізовані не тільки цифровим моделюванням, а й теоретично, наприклад із застосуванням ме-

6\*

83

тоду ренормування груп. При цьому отриманий результат не буде залежати від обраної дискретності навіть у випадку великих масштабів. Поняття спектральної розмірності природно розглянути на прикладі моделі випадкового блукання, оскільки очікування середньої квадратичної відстані від початкової точки після проміжку *N* кроків за часом визначається так:

$$\langle R^2 \rangle \propto N^{D/\bar{D}}$$
. (3.16)

У цьому рівнянні D — фрактальна розмірність фрактальної структури,  $\tilde{D}$  — саме спектральна розмірність для випадкового блукання. У евклідовому просторі з цілим D маємо  $\tilde{D} = D$ , і тоді з рівняння (3.16) отримуємо добре відоме співвідношення для броунівського випадкового блукання. Для фрактальних структур з нецілим D  $\tilde{D} \neq D$ , що приводить до аномальної поведінки випадкових блукань на фракталах.

Загальна кількість  $S_N$  різних областей, в які попадає блукаюча на проміжку N кроків за часом, залежить тільки від фрактальної розмірності:

$$\langle S_N \rangle \propto \begin{cases} N^{\widetilde{D}/2}, & \widetilde{D} < 2, \\ N, & \widetilde{D} \ge 2. \end{cases}$$
 (3.17)

Функція  $P_0(N)$ , яка визначає ймовірність повернення у початкову точку за проміжок часу N, також залежить тільки від  $\tilde{D}$ :

$$P_0(N) \propto N^{-D/2}$$
. (3.18)

Проміжок часу  $T(\xi)$ , за який частинка, що почала блукання з початкової точки, пройде вперше відстань  $\xi$ , визначається таким чином:

$$T(\xi) \propto \xi^{2D/\tilde{D}}.$$
(3.19)

Очевидно, що останнє рівняння (3.19) можна розглядати як обернене до (3.16). Загалом ці співвідношення є природним поширенням з евклідового простору на фрактальний простір, оскільки рівняння (3.16)—(3.19) є справедливими для евклідового простору, де  $\tilde{D} = D = d$ .

Введена тут спектральна розмірність  $\widetilde{D}$  може бути означена тільки із заохоченням фрактальної розмірності, оскільки вона

містить у собі інформацію про часову поведінку. При цьому кожне з рівнянь (3.16)—(3.19) можна розглядати як означення  $\tilde{D}$ :

$$\widetilde{D} = \frac{2\log(d+1)}{\log(d+3)}, \quad D = \frac{\log(d+1)}{\log 2}, \quad (3.20)$$

оскільки кожне з них визначає взаємопов'язані величини. Для певних фракталів можна отримати спектральну розмірність аналітично за допомогою аналізу ймовірності переходу методом ренормування груп (див. також параграф 9.1).

Виникає правомірне запитання: чому  $\tilde{D}$  називається спектральною розмірністю. Назва прийшла від іншої властивості цієї величини. Давайте розглянемо еластичний матеріал з фрактальною структурою, такий як вже згадувана серветка Серпінського (параграф 2.3) або перколяційний кластер. Якщо її несильно зігнути, то вона буде осцилювати навколо своєї точки рівноваги. Спектральну густину  $\rho(\omega)$  осциляції можна виразити як функцію частоти  $\omega$  у такий спосіб:

$$\rho(\omega) \propto \omega^{D-1} \,. \tag{3.21}$$

Закономірно, що оскільки величина  $\tilde{D}$  визначає спектр осциляцій фрактальної структури, то вона має назву спектральної розмірності. Нетривіальним фактом є те, що властивості і неперервного блукання на гратці (3.16)—(3.19), і осциляції (3.21) характеризуються тільки одним параметром.

Інша властивість спектральної розмірності випливає з аналізу незворотного блукання на фракталі, а саме: чи можна застосовувати формулу D' = (d + 2)/3, коли просторова розмірність d не є цілим числом. Відповідь на це запитання — ні, оскільки потрібно застосовувати іншу формулу для цієї задачі:

$$D' = \frac{D}{\widetilde{D}} \cdot \frac{\widetilde{D} + 2}{3} \quad \left(\widetilde{D} \le 4\right). \tag{3.22}$$

Мандельброт показав [19], що спектральна розмірність може бути означеною через більш елементарні фрактальні розмірності.

# 3.6. ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ САМОАФІННИХ МНОЖИН. ЛОКАЛЬНА І ГЛОБАЛЬНА РОЗМІРНОСТІ. ВНУТРІШНЯ І ЗОВНІШНЯ РОЗМІРНОСТІ

У попередньому параграфі було проаналізовано різні способи визначення фрактальних розмірностей та було показано, що однорідні самоподібні фрактальні множини характеризуються єдиним значенням фрактальної розмірності. Однак поряд із самоподібними фракталами можна розглядати і самоафінні (див. параграф 1.2). Клас самоафінних множин ширший ніж клас самоподібних і містить у собі клас самоподібних множин як окремий випадок. Нагадаємо, що при афінному перетворенні масштабні коефіцієнти уздовж різних напрямів різні. Як приклад самоафінних множин у фізиці можна розглядати графіки деяких функцій, наприклад функцію Мандельброта (параграф 2.7), бісові сходи (параграф 2.8), а також фрактальні поверхні, отримані за алгоритмами випадкового перенесення та випадкового додавання (параграф 2.9). У цьому випадку фізичні величини, що відкладаються уздовж різних координатних осей, мають, як правило, різні фізичні розмірності і внаслідок цього перетворюються з різними незалежними масштабними коефіцієнтами. Розмірність самоподібності такої множини не може бути визначена.

Однак графік будь-якої залежності можна трактувати як звичайну геометричну лінію у двовимірному евклідовому просторі і спробувати визначити фрактальну розмірність цієї лінії, використовуючи метод покриття або апроксимуючої ламаної, так, як це було зроблено для берегової лінії, або використовуючи одне з визначень фрактальної розмірності із параграфа 3.5. Проаналізуємо, до чого приведе така спроба.

зуємо, до чого приведе така спроба. Неважко помітити, що всі самоафінні графіки мають масштабні (скейлінгові) властивості вигляду

$$B(bt) = b^H B(t). \tag{3.23}$$

Будемо вважати надалі, що аргументом досліджуваної функції є час, а сама функція визначає деякі координати. Функції, які задовольняють співвідношення (3.23), називаються однорідними за Ейлером функціями, а величина H — показником однорідності цієї функції. Таким чином, будь яка самоафінна функція є однорідною за Ейлером. Проте, очевидно, не всякій однорідній за Ейлером функції будуть притаманні властивості самоафінності та фрактальні вияви. Визначимо розмірність графіка функції B(t) за покриттям, тобто клітинкову розмірність D. Покриємо графік клітинками розміром  $b\tau$  уздовж осі часу і ba уздовж осі координат. Найменша клітинка має розмір  $\tau \times a$ .

Якщо  $N(b, a, \tau)$  — число клітинок, яке необхідне для покриття кривої, то розмірність *D* може бути визначена з виразу

$$N(b, a, \tau) = b^{-D}.$$
 (3.24)

Нехай тривалість розглянутого періоду дорівнює T, тоді для покриття осі часу необхідно  $T/b\tau$  відрізків завдовжки  $b\tau$ . Змінювання досліджуваного графіка функції у межах кожного відрізка визначається наведеною вище скейлінговою формулою (3.23). Щоб покрити такий розмах клітинками висотою ba кожна, необхідно взяти  $B(b\tau)/ba$  рядків клітинок. Таким чином,

$$N(b;a,\tau) = \frac{B(b\tau)}{ba} \frac{T}{b\tau} \cong \frac{b^H B(\tau)}{ba} \frac{T}{b\tau} \sim b^{H-2}.$$
 (3.25)

Порівнюючи вирази (3.24) та (3.25), знаходимо, що для самоафінних кривих

$$D=2-H.$$

Це співвідношення одержане у наближенні малих клітинок, так що розмірність *D* описує поведінку самоафінної множини в локальних границях.

У випадку, коли для покриття використовуються клітинки, розмір яких більший ніж характерний розмір зміни кривої, попередні оцінки стають хибними. Якщо обрати величину a порядку характерної довжини кроку a = 1, то для покриття всієї кривої достатньо одного рядка клітинок:

$$N(b; a, \tau) = \frac{T}{b\tau} \sim b^{-1} \Rightarrow D = 1.$$

Таким чином, глобальна фрактальна розмірність самоафінних множин завжди дорівнює одиниці.

Якщо використати процедуру вимірювання за допомогою апроксимуючої ламаної, то для довжини ланки  $L \sim r_1^{1-D}$  ламаної можна записати

$$\eta = \sqrt{b^2 \tau^2 + b^{2H} \left( B(\tau) / a \right)^2} \ .$$

За одиницю вимірювання обрано лінійку, розмірність якої збігається з розмірністю часу, якщо її укладати уздовж осі часу, і довжини, коли вона зорієнтована уздовж осі B(t).

Якщо величина a — мале число, то можна знехтувати першим доданком і  $\eta \sim b^{H}$ . Кількість таких відрізків уздовж осі часу дорівнює

$$\frac{T}{b\tau} \sim \dot{b}^{-1} \sim \eta^{-\frac{1}{H}} \Rightarrow L \sim \eta^{1-\frac{1}{H}} \Rightarrow D = \frac{1}{H},$$

де  $D = \frac{1}{H}$  — внутрішня розмірність.

Якщо *а* велике, то перший доданок переважає,  $\eta \sim b$ ,  $L \sim \eta^0 \Rightarrow D = 1$  — внутрішня глобальна розмірність.

Таким чином, при дослідженні властивостей самоафінних фракталів ми прийшли до понять зовнішньої та внутрішньої розмірностей, кожна з яких може бути визначена як узагальнено, так і локально.

Термін зовнішньої розмірності зазвичай ототожнюють з поняттям клітинкової розмірності (розмірності, пов'язаної з підрахунком квадратів, які покривають множину), оскільки при побудові цієї величини доводиться виходити за межі самої досліджуваної кривої. Зовнішня розмірність фрактальної кривої, що визначена локально, змінюється від розмірності гладкого об'єкта до розмірності простору ( $D_{(E)} = 2 - H$  для лінії на площині; у випадку фрактальної лінії у просторі *n* вимірів  $D_{(E)} = n - (n - 1)H$ ). Зазначимо, що фрактальні розмірності, визначені у параграфі 2.9, для фрактальних поверхонь — це зовнішні локальні розмірності.

При визначенні внутрішньої розмірності фрактальної кривої використовуються тільки поняття, що пов'язані з самою кривою, а не з тим, яким способом вона розташована на площині. Така розмірність може бути визначена шляхом апроксимації фрактала ламаною лінією з довжиною ланки, що прямує до нуля. Очевидно, що при такому розгляді важливим є лише вимірювання відстані на кривій у визначеному масштабі, а не розташування кривої на площині. Внутрішня розмірність фрактальної кривої (в локальному сенсі) змінюється від розмірності гладкого об'єкта до нескінченності ( $D_{(I)} = 1/H$ ).

Глобальна розмірність (внутрішня і зовнішня) самоафінної фрактальної кривої, тобто розмірність, при визначенні якої використовувались достатньо великі масштаби, завжди дорівнює одиниці, тобто самоафінні криві є нефрактальними в глобальному сенсі.

Очевидно, що в дослідженнях різних явищ необхідно користуватись різними визначеннями фрактальної розмірності. Наприклад, якщо ми цікавимось дослідженням адсорбції на тонку нитку, то важливо знати, скільки атомів може вміститися поблизу від нитки, тобто треба використовувати зовнішню розмірність. Якщо ж необхідно оцінити масу нитки, то необхідно враховувати внутрішню розмірність. Те, що зовнішня та внутрішня розмірності самоафінних фрактальних кривих не збігаються, означає, що на відміну від регулярних, багато разів диференційованих кривих, для фракталів порушується зв'язок між внутрішніми та зовнішніми характеристиками.

Якщо для регулярних замкнених кривих довжина ~ L, то природно чекати, що поверхня, яка міститься всередині них, має площу ~  $L^2$ , то для замкнених фрактальних кривих площа поверхні, що міститься усередині них, ніяк не пов'язана з їх довжиною.

# САМОАФІННІ ФРАКТАЛИ

## 4.1. МЕТОД НОРМОВАНОГО РОЗМАХУ ОБЧИСЛЕННЯ РОЗМІРНОСТЕЙ САМОАФІННИХ МНОЖИН

Як вже було зазначено у параграфі 3.6, фрактальні властивості самоафінних множин характеризуються показником *H* у скейлінговому співвідношенні (3.23), який називають показником Герста. Цей показник входить до формул обчислення зовнішньої та внутрішньої локальних розмірностей. Для знаходження експоненти Герста за експериментальними

Для знаходження експоненти Герста за експериментальними даними використовується метод нормованого розмаху, або метод Герста. Історично метод нормованого розмаху (метод R/S) було відкрито Г.Е. Герстом на початку XX ст. при розв'язанні задачі про знаходження оптимального об'єму водосховища при заданому наборі вимірів стоку води з нього. А саме, проглянувши 800річні хроніки розливів річки Ніл, він помітив, що слідом за роком великої повені наступав ще один такий гарний рік, а слідом за роком малої повені наступав так само поганий рік, — події не були випадковими.

Нехай за час *t* водосховище приймає об'єм води  $\xi(t)$  з оточуючих його річок (приплив), а регульований об'єм відібраної за період т води (стік) дорівнює  $\langle \xi \rangle_{\tau}$ . Будемо вважати час *t* дискретним, що набуває цілочислових значень. Потрібно знайти оптимальний об'єм водосховища — об'єм, який дозволить забирати з водосховища кожен рік об'єм води, що дорівнює середньому припливу за період т. Проміжок часу  $\tau$ , на якому аналізується часова послідовність, називається запізнюванням.

Середній щорічний приплив води за т років:

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t).$$

Це середнє повинне дорівнювати об'єму води, який щорічно відбирається з резервуара. Величина

$$X(t,\tau) = \sum_{u=1}^{r} \left[ \xi(u) - \left\langle \xi \right\rangle_{\tau} \right]$$
(4.1)

називається накопиченим відхиленням припливу від середнього. Різниця максимального та мінімального накопиченого відхилення за т років називається розмахом:

$$R(\tau) = \max_{1 \le t \le \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \le t \le \tau} X(t, \tau).$$

Ввівши поняття нормованого розмаху — безрозмірного співвідношення R/S, де S — стандартний розкид величини  $\xi(t)$ , який визначається за формулою

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \left[ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \right]},$$

Герст виявив, що *R/S* добре описується емпіричною формулою:

$$R/S = \left(\frac{\tau}{2}\right)^{H}, \qquad (4.2)$$

де стала *H* — експонента Герста. Таким чином, формула (4.2) може бути використана для обчислення показника Герста за даними експерименту.

# 4.2. ФРАКТАЛЬНІ ЧАСОВІ РЯДИ, ДОВГОСТРОКОВІ ЗМІНИ ТА СТАТИСТИКА ГЕРСТА

Багато фізичних експериментів приводять до часових залежностей або часових рядів. Якщо часова залежність виявляє дещо "безладну" поведінку фізичної величини як на маленьких, так і на великих часових інтервалах, то таку часову залежність можна дослідити за допомогою методу нормованого розмаху (параграф 4.1). Означені вище послідовності вимірів характеризуються показником Герста (*H*). Графік залежності досліджуваної фізичної величини від часу  $\xi(i)$ , у цьому випадку, є самоафінною фрактальною кривою з локальною зовнішньою фрактальною розмірністю D = 2 - H.

Дослідження, проведені для широкого класу природних явищ, таких, як рівень рік та озер, метеорологічні дані, шаруваті відкладення, висоти хвиль, сонячна активність і т. ін., показали, що значення показника Герста лежать в інтервалі  $H = 0.73 \pm 0.09$ . Той факт, що для багатьох природних процесів H > 1/2, викликає інтерес тому, що за відсутності довгочасної статистичної залежності нормований розмах  $R/S \sim \sqrt{\tau}$ , тобто H = 1/2. Дійсно, якщо моделювати випадковий процес киданням *n* монет  $\tau$  раз і як випадкову величину вибирати  $\xi = N_{\text{реверс}} - N_{\text{аверс}}$ , то при великих  $\tau$  і *n* розподіл  $\xi$  наближається до нормального розподілу Гаусса. Для цього процесу

$$R = \sqrt{\frac{\pi}{2}n\tau - 1} , \quad S = \sqrt{n} , \quad \frac{R}{S} = \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow H = \frac{1}{2} .$$

Щоб описати статистику нормованого розмаху R/S з H > 1/2, Герст використовував експерименти для ймовірнісної колоди карт. На цих картах було нанесено числа ±1 (по 13 карт), ±3 (по 8 карт), ±5 (по 4 карти), ±7 (по 1 карті). Усього в колоді було 52 карти і нанесені на них числа добре наближалися до нормального розподілу. Якщо колоду перетасувати і відкрити одну карту, то як результат багаторазового повторення такої процедури утворюється ряд чисел, для якого частотний розподіл спостережуваної величини (у даному випадку номера на карті) буде близьким до нормального розподілу. Аналіз даної часової залежності методом нормованого розмаху приводить до H = 1/2, чого і слід було очікувати для випадкової величини.

Проведемо узагальнення описаної вище процедури, яке приводить до так званого зміщеного випадкового ряду. В ймовірнісну колоду карт було докладено карту без числа – джокер. Колода тасується, відкривається одна карта і на ній записується число. Потім колода здається на дві руки. Після цього, якщо на відкритій перед цим карті було число +2, то дві карти з найбільшими додатними числами передаються з першої руки на другу, а з другої руки на першу передаються дві карти з найбільшими від'ємними числами. При цьому на другій руці набирається деяке зміщення, тобто центр розподілу зміщується у бік додатних чисел тим сильніше, чим більша карта була спочатку витягнута. Після цього на другу руку передається джокер, і утворена там колода карт використовується для продовження генерації випадкової послідовності. Якщо при черговому експерименті відкривається джокер, то уся колода перетасовується і починається нова здача. Отримана таким чином послідовність значень випадкової величини відрізняється від отриманої раніше послі-довності незалежних випадкових чисел. Накопичене відхилення від середнього значення, обчислене за формулою (4.1) при фік-

92

сованому значенні  $\tau$  для такої числової послідовності, виявляє сильні варіації при меншому шумі. Аналіз нормованого розмаху показує, що при малих значеннях  $\tau$  значення R/S менше ніж значення цього відношення для процесу з незалежними приростами. Однак при значеннях  $\tau$ , які перевищують 100, величина R/S для зміщеного процесу значно вища ніж для незміщеного.

Для показника Герста у діапазоні  $20 < \tau < 2500$  знайдене значення  $H = 0.71 \pm 0.01$ .

Очевидно, що зміщений процес Герста приводить до відхи-



РИС. 4.1. Крива зміни показника Герста протягом часу для ймовірнісної колоди карт

лень випадкової величини, які підтримуються в середньому протягом *n* знімань колоди, якщо на кожній руці *n* карт (у даному випадку генерація нової випадкової послідовності — випадання джокера — відбувається в середньому після 27 знімань колоди). У цьому випадку, якщо при непарному зніманні колоди випадає додатне зміщення і сумарне число збільшується, і навпаки, якщо зміщення від'ємне, спостерігається тенденція до подальшого зменшення. На великих проміжках послідовність Герста, отримана у зміщеному процесі, буде близька до випадкового процесу з незалежними приростами. Обчислимо уявні значення показника Герста, для чого апроксимуємо результати вимірів у діапазоні  $\tau_{min} \leq \tau$ . Графік отриманої залежності наведено на рис. 4.1.

На цьому рисунку можна побачити, що характерний час зміни H дорівнює  $\tau_{min} \sim 27$ , що відповідає характерному часу підтримки тенденції у досліджуваній системі (як результат первісного знімання ймовірнісної колоди карт виникає тенденція, спрямована на збільшення або зменшення середнього значення добутої з колоди карти, і буде підтримуватись до того часу, доки не випаде джокер, що трапляється в середньому один раз на 27 знімань колоди).

Багато природних явищ підпорядковуються статистиці Герста, оскільки володіють ефектами пам'яті. Дійсно, потік води у великих водних системах повинен залежати від кількості води в їх басейнах. Ця кількість води буде підтримувати постійний стік протягом періодів засухи. Якщо засуха затягується, то загальний рівень води в басейні падає, і в наступні періоди дощів стік води буде менше за нормальний, тому що вода поглинається ґрунтом. Такій поведінці стоку річок сприяють фрактальні властивості грунтів, звідки ці ріки живляться водою.

### 4.3. ВЛАСТИВОСТІ САМОАФІННИХ ФРАКТАЛІВ

За означеням статистично самоподібний фрактал є ізотропним. Ця властивість наочно виявляє себе, зокрема, у класичному прикладі обчислення фрактальної розмірності берегової лінії методом підрахунків комірок (див. вступ). А саме, фрактальна розмірність кам'яної берегової лінії не залежить від орієнтації комірок.

Формальне означення самоподібного фрактала у двовимірному *ху*-просторі є таким, що f(rx, ry) статистично подібна до f(x,y), де r — масштабний (скейлінговий) параметр. Цей результат може бути кількісно означеним із застосуванням фрактального співвідношення (1). Кількість комірок із розмірами  $x_1, y_1$ , необхідних, щоб покрити кам'яну берегову лінію, дорівнює  $N_1$ , кількість комірок  $x_2 = rx_1, y_2 = ry_1$ , потрібних, щоб покрити кам'яну берегову лінію, дорівнює  $N_2$ . Якщо кам'яна берегова лінія є самоподібним фракталом, тоді  $N_2/N_1 = r.^{-D}$ .

Статистично самоафінний фрактал не є ізотропним. Формальне означення самоафінного фрактала у двовимірному *ху*-просторі є таким:  $f(rx, r^Hy)$  статистично подібна до f(x, y), де H міра Хаусдорфа. Приклад самоафінного фрактала — випадкового блукання — подано на рис. 4.2. Після кожного кроку вправо вибирається вертикальний випадковий крок (показано результат уп-



РИС. 4.2. Приклади (1-4) випадкового блукання (броунівський шум)

родовж 150 кроків). Прямі лінії показують  $n^{1/2}$  стандартне відхилення для броунівського шуму [36]. Щоб його згенерувати, треба виконати крок прямо (на захід) і кинути монету, якщо реверс, то зробити крок вліво (на південь), якщо аверс, — крок вправо (на північ), потім зробити інший крок прямо (на захід) і повторити процес. Цей метод підрахунку комірок, як вже обговорювалося, використовується для визначення міри Хаусдорфа і фрактальної розмірності випадкового блукання. Розміри комірок треба відмасштабувати за мірою Хаусдорфа. Так само як і для кам'яної берегової лінії, якщо  $N_1$  — кількість комірок розмірами  $x_1$ ,  $y_1$ , необхідних, щоб покрити випадкове блукання, а кількість скриньок розмірами  $x_2 = rx_1$ ,  $y_2 = r^H y_1$  дорівнює  $N_2$ , то випадкове блукання є самоафінний фрактал, якщо  $N_2/N_1 = r^{-D}$ . Перед тим як довести, що випадкове блукання є самоафінний фрактал з H == 1/2 і D = 3/2, розглянемо деякі властивості самоафінних фракталів.

Нехай випадкова однозначна функція часу x(t) має визначений спектр. Класичний приклад такої функції (часового ряду) магнітне поле Землі, яке вимірюється як функція часу в кожній точці земної поверхні. Використаємо далі підхід, запропонований у [36].

Одним із основних положень часових рядів є інтервал між величинами  $x(t + \tau)$  і x(t), а саме чим більше часовий інтервал  $\tau$ , тим менше кореляція між двома величинами. Нас цікавить інше: для того щоб часові ряди були самоафінним фракталом, необхідно, щоб різниця в часових серіях ( $x(t + \tau) - x(t)$ ) задовольняла умову ймовірності:

$$p\left[\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau^{H}} < x'\right] = F(x') , \qquad (4.3)$$

де міра Хаусдорфа  $H \in$  стала величина. Точкові значення  $x \in$  випадковими, але вони корельовані з суміжними величинами (4.3). У випадку, коли суміжні точки є некорельованими (H = 0), отримуємо так званий білий шум. Чим більше значення H, тим гладкіша залежність x від t. Для більшості випадків функція F(x')є функцією гауссівського розподілу:

$$F(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{x'} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx .$$
 (4.4)

Величини x мають гауссівський розподіл біля x = 0 і не залежать від величини H. Якщо розподіл є гауссіаном і якщо 0 < H < 1, то випадковий сигнал є так званим дробовим, фрагментарним, броунівським шумом (для H = 1/2 маємо броунівський шум). Що цікаво, залежність x від t у випадкових часових рядах подібна до форми сніжинок Коха (параграф 2.1). Варіації у часових рядах присутні на всіх масштабах, при цьому і довжина кроку з часових рядів, і локальні похідні (нахили) не визначені. Тому буде цілком справедливим розглядати x(t) як фрактал. Саме у випадку тріади Коха та інших конструкцій на площині фрактальна розмірність лежить у межах {1, 2} і відповідна евклідова розмірність дорівнює 2. Якщо d = 2, то з умови ймовірності  $p_i = r_i^{d-D}$ , і того, що наступна комірка розміром r буде містити у собі попередню комірку (див. також параграф 9.3), можна записати

$$\frac{p}{\tau^{2-D}} = \text{const},\tag{4.5}$$

де відповідний масштаб для часового ряду є  $\tau$ . У виразі (4.3) часові ряди розходяться з інтервалом  $\tau$  згідно зі степеневим законом  $\tau^{H}$ . Порівнюючи (4.3) і (4.5), визначаємо міру Хаусдорфа:

$$H = 2 - D. \tag{4.6}$$

Тим самим отримано головне означення фрактальної розмірності для часових рядів.

Виникає питання: чи можна отримати це означення іншим шляхом. Очевидно, що так. Давайте будемо вимагати для 1 < D < 2, щоб 0 < H < 1, як для дробового броунівського шуму. Нехай часові серії x(t) визначаються на інтервалі часу *T*. Які статистичні властивості тоді має сигнал? Середній сигнал  $\overline{x}(T)$  задається таким виразом:

$$\bar{x}(T) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) dt \,. \tag{4.7}$$

Зміна сигналу V(T) визначається так:

$$V(T) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} [x(t) - \overline{x}]^{2} dt.$$
(4.8)

Зміна сигналу безпосередньо пов'язана зі стандартним відхиленням сигналу  $\sigma(T)$  за формулою

$$\sigma(T) = [V(T)]^{1/2}.$$
 (4.9)

96

Середній сигнал і зміна сигналу є першими двома моментами часових рядів.

Необхідною умовою того, щоб часові ряди були фракталом, є степенева залежність зміни сигналу V(T) від T (тут ми скористаємось підходом, запропонованим у працях [36—38]):

$$V(T) \sim T^{2H},$$
 (4.10)

або

$$\sigma(T) \sim T^{H}.$$
 (4.11)

Цей вираз подібний до (4.3), оскільки  $T \in$  еквівалентом  $\tau$ . Стандартне відхилення дробового броунівського шуму збільшується зі збільшенням степеня проміжку часу T. Для броунівського шуму (випадкове блукання)  $\sigma \sim T^{1/2}$  ( $\sigma \sim n^{1/2}$ ).

Інше означення фрактальної розмірності часових рядів можна отримати методом підрахунку комірок. Для цього встановимо відповідність прямокутних розмірів комірки шириною T і висотою  $\sigma_T = \sigma(T)$ . Оскільки одиниці сигналу x і, відповідно, одиниці стандартного відхилення  $\sigma$  можуть відрізнятися від одиниць часу t, то відношення "ширина/висота" комірки можуть мати довільні одиниці вимірювання. Наприклад, якщо вимірюється електричний струм як функція часу, то ширина комірки визначається в секундах, а висота — в амперах.

Далі поділимо часовий інтервал *T* на *n* менших часових інтервалів довжиною  $T_n = T/n$  і виберемо комірку меншого розміру шириною  $T_n$  і висотою  $\sigma_n = \sigma_T/n$ . Ці комірки мають те саме масштабне співвідношення, як і розглядувана комірка. Але стандартне відхилення тут пов'язане з інтервалом  $T_n$ , при цьому  $\sigma_{Tn} = \sigma(T/n)$  не дорівнює  $\sigma_n$ . Визначимо кількість масштабованих скриньок  $N_n$  меншого розміру  $T_n \times \sigma_n$ , які потрібні, щоб покрити площу шириною *T* і висотою  $\sigma_{Tn}$  за такою формулою:

$$N_n = \frac{T\sigma_{T_n}}{T_n\sigma_n} = n^2 \frac{\sigma_{T_n}}{\sigma_n} \,. \tag{4.12}$$

Використовуючи (4.11), маємо

$$\frac{\sigma_{T_n}}{\sigma_T} = \frac{\sigma(T/n)}{\sigma(T)} = \left(\frac{T/n}{T}\right)^H = \frac{1}{n^H}.$$
(4.13)

3 рівнянь (4.12) та (4.13) отримуємо

$$N_{\pi} = n^{2-H} = \left(\frac{T}{T_n}\right)^{2-H}.$$
 (4.14)

Часові ряди можна розглядати в термінах амплітуди X(f, T), де f — частота. Величина X(f, T) є комплексним числом, яка визначає фазу сигналу. Амплітуду у частотній області X(f, T) можна отримати через перетворення Фур'є x(t) в інтервалі 0 < t < T за формулою

$$X(f,T) = \int_{0}^{T} x(t)e^{2\pi i f t} dt , \qquad (4.15)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ . Відповідно, зворотне перетворення Фур'є, яке поєднує величини x(t) і X(f, T), запишемо так:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f,T) e^{-2\pi i f t} df . \qquad (4.16)$$

Величину  $|T(f, T)|^2 df$  можна розглядати як внесок у загальну енергію величини x(t) від тих компонентів, частоти яких знаходяться в інтервалі [f, f + df]. Вертикальні лінії у виразі  $|T(f, T)|^2 df$ стосуються абсолютного значення комплексної величини. Якщо цю величину поділити на T, то отримаємо значення енергії. Силова спектральна щільність величини x(t) при  $T \to \infty$  визначається за формулою

$$S(f) = \frac{1}{T} |X(f,T)|^2.$$
(4.17)

Добуток  $S(f)df \in$  енергією в часових рядах, яка асоціюється з діапазоном частот між f i f + df.

Для часових рядів, які є фракталом, силова спектральна щільність має степеневу залежність від частоти:

$$S(f) \sim f^{-\beta}$$
. (4.18)

Для отримання співвідношення між показником степеня  $\beta$  і фрактальною розмірністю *D* розглянемо два часових ряди  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$ , які пов'язані виразом

$$x_2(t) = \frac{1}{r^H} x_1(rt) \,. \tag{4.19}$$

Фундаментальною властивістю самоафінних фрактальних часових рядів є те, що  $x_1(t)$  має такі ж самі статистичні властивості, як і  $x_2(t)$ . Фур'є-перетворення  $x_2(t)$  визначається за формулою

$$X_2(f,T) = \int_0^T x_2(t) e^{2\pi i f t} dt .$$
 (4.20)

Підставляючи (4.19) і виконуючи заміну змінних t' = rt, отримуємо

$$X_2(f,T) = \int_0^{r_T} \frac{x_1(t')}{r^{ir}} e^{2\pi i f t'/r} \frac{dt'}{r}.$$
 (4.21)

Порівнюючи (4.21) з (4.15), одержуємо

$$X_{2}(f,T) = \frac{1}{r^{H+1}} X_{1}\left(\frac{f}{r}, rT\right).$$
 (4.22)

3 означення силової спектральної щільності (4.17) маємо

$$S_{2}(f) = \frac{1}{T} \left| X_{2}(f,T) \right|^{2} = \frac{1}{r^{2H+1}} \frac{1}{rT} \left| X_{1} \left( \frac{f}{r}, rT \right) \right|^{2} = \frac{1}{r^{2H+1}} S_{1} \left( \frac{f}{r} \right). \quad (4.23)$$

Оскільки  $x_2 \in$ , власне, перемасштабована версія  $x_1$ , то її силові спектральні щільності повинні бути так само масштабованими. Таким чином, можна записати

$$S(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S\left(\frac{f}{r}\right).$$
 (4.24)

3 формул (4.18) та (4.17) випливає, що

7\*

$$\beta = 2H + 1 + 5 - 2D. \tag{4.25}$$

Для дробового броунівського шуму  $(0 \le H \le 1, 1 \le D \le 2)$  маємо  $1 \le \beta \le 3$ . Для броунівського шуму (H = 1/2, D = 3/2) маємо  $\beta = 2$ .

Деякі приклади дробового броунівського шуму можуть бути згенеровані штучно за таким алгоритмом:

1) розглянемо N = 500 зростаючих кроків довжиною  $\Delta T$ . Кожний крок визначається випадковою величиною  $h_n$ , яка, у свою чергу, визначається гауссіаном розподілу ймовірності (4.4);

2) дискретне фур'є-перетворення обирається з випадкових величин. Фур'є-коефіцієнти визначаються за формулою

$$H_m = \Delta T \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{2\pi i m n / N} . \qquad (4.26)$$

Це перетворення переводить N дійсних величин (h<sub>n</sub>) в N комп-

лексних величин ( $H_m$ ). Оскільки перетворення обрано як гауссівська біла шумова послідовність, то фур'є-спектр буде плоским. За винятком статистичного розподілу, амплітуди  $|H_m|$  будуть однаковими.

3) фур'є-коефіцієнти Н<sub>m</sub> фільтруються за формулою

$$H'_{m} = \left(\frac{m}{N-1}\right)^{\beta/2} H_{m}.$$
 (4.27)

Степінь  $\beta/2$  виникає, оскільки силова спектральна щільність пропорційна квадрату амплітуди. Амплітуди коефіціентів з маленькими індексами *m* відповідають коротким довжинам хвиль  $\lambda_m$  і великим хвильовим числам  $k_m = 2\pi/\lambda_m$ . Коефіцієнти з великими індексами *m* відповідають довгим довжинам хвиль і маленьким хвильовим числам;

4) зворотне дискретне фур'є-перетворення отримується з відфільтрованих фур'є-коефіцієнтів. Послідовність випадкових величин визначається за формулою

$$h'_{n} = \frac{1}{N\Delta T} \sum_{m=0}^{N-1} H'_{m} e^{-2\pi i n m / N} . \qquad (4.28)$$

Ці точки і утворюють дробовий броунівський шум. Для того щоб уникнути граничних ефектів (періодичності), треба залишати тільки центральну частину послідовності.

Давайте зінтегруємо штучні образи, використовуючи ті самі методи, що і для генерування симульованого дробового броунівського шуму.

1. Розглянемо квадратну сітку  $N \times N$ , яка складається з  $N^2$  точок, що рівномірно розподілені в квадраті. Кожна точка визначається випадковою величиною  $h_{nm}$  з (n, m) за гауссівським розподілом ймовірності, визначеним у (4.4).

2. Двовимірне дискретне фур'є-перетворення на вибірці  $N^2$  точок даних  $h_{nm}$  матриць для генерування  $N \times N$  комплексних коефіцієнтів  $H_{st}$  можна отримати, використовуючи звичайне визначення

$$H_{st} = \left(\frac{L}{N}\right)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h_{nm} \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}(sn+tm)\right],$$

де *s* визначає перетворення у *x*-напрямі (s = 0, 1, 2, ..., N - 1), а *t* визначає перетворення в *y*-напрямі (t = 0, 1, 2, ..., N - 1). Після цього кожний коефіцієнт перетворення  $H_{st}$  фактично переозначує

еквівалентне радіальне число за таким співвідношенням:

$$r = (s^2 + t^2)^{1/2}.$$

Двовимірна середня силова спектральна щільність S<sub>2</sub>, для кожного радіального хвильового числа k<sub>i</sub> визначається так:

$$S_{2j} = \frac{1}{L^2 N_j} \sum_{i=1}^{N_j} |H_{st}|^2 ,$$

де  $N_j$  — кількість коефіцієнтів, які задовольняють умову j < r < j + + 1, а підсумовування виконується за всіма коефіцієнтами  $H_{st}$  у цьому діапазоні.

3. Після цього фрактальна розмірність  $D_2$  визначена, і відповідне значення показника степеня  $\beta$  отримується зі співвідношення  $D_2 = (7 - \beta)/2$ . Нову вибірку комплексних коефіцієнтів отримуємо зі співвідношення

$$H_{st}^{\circ*} = H_{st} / k_r^{\beta/2} \, .$$

4. Використайте зворотне двовимірне дискретне фур'є-перетворення для генерування нового образу.

# мультифрактали

Фрактальні множини, які розглянуто у попередніх розділах, унаслідок самоподібності характеризуються у кожній своїй точці одним єдиним значенням фрактальної розмірності. Такі фрактальні множини називаються монофракталами.

У цьому розділі наведено множини, які характеризуються не однією, а набором фрактальних розмірностей. Такі множини прийнято називати мультифракталами. У загальному випадку мультифрактал можна розглядати як взаємозв'язок фрактальних підмножин з різними розмірностями.

Класично, щоб ввести поняття мультифрактала, розглядають так званий біномний мультиплікативний процес (процес Безіковича). Розподіл, що породжується цим процесом, легко аналізується і має численні застосування.

Нехай існує деяка фізична величина з одиничною мірою і вона розподілена на відрізку прямої  $\Im = [0, 1]$ . Поділимо відрізок  $\Im$  на дві частини рівної довжини  $\delta = 2^{-1}$ . Зіставимо з лівою частиною відрізка частку p < 1 вихідної фізичної величини, а на правій частині відрізка розмістимо частку вихідної величини, що залишилася. Після такої операції міра вихідної величини, що міститься у лівій частині відрізка, дорівнює p, а у правій — q = 1 - p. Таким чином, у першому поколінні біномного мультиплікативного процесу існує два відрізки, які містять у собі p та q часток вихідної величини.

Продовжимо описаний вище процес ітераційно. У другому поколінні (n = 2) відрізок розбивається на чотири відрізки довжиною  $\delta = 2^{-2}$ . Розподіл вихідної величини за цими відрізками описується таким упорядкованим переліком мір: *pp*, *pq*, *qp*, *qq*.

У *п*-му поколінні отримуємо  $N = 2^n$  відрізків довжиною  $\delta = 2^{-n}$ , які будемо нумерувати індексом i = 0, ..., N - 1. Міра кожної комірки — частка вихідної фізичної величини, яка зосереджена у

Номер відрізка, і		Кількість нулів у	Міра вихідної
У десятковому поданні	У двійковому поданні	двійковому по- данні, <i>k</i>	фізичної величини, µ <sub>і</sub>
0	000	3	$ppp = p^3 q^{3-3}$
1	001	2	$ppq = p^2 q^{3-2}$
2	010	2	$pqp = p^2 q^{3-2}$
3	011	1	$pqq = p^1 q^{3-1}$
4	100	2	$qpp = p^2 q^{3-2}$
5	101	1	$qpq = p^1q^{3-1}$
6	110	1	$qqp = p^1 q^{3-1}$
7	111	0	$qqq = p^0 q^{3-0}$

цій комірці, — визначається рівнянням  $\mu_i = p^k q^{(n-k)}$ , де k — кількість нулів у двійковому поданні номера комірки *i*.

Зокрема, у третьому поколінні (n = 3) маємо вісім комірок з такими мірами (див. таблицю).

У біномному мультиплікативному розподілі для довільного n існує єдиний відрізок із максимальною мірою  $(1 - p)^n$ , n відрізків із мірою  $(1 - p)^{n-1}p^1$  і т. ін. У загальному випадку існує

$$N_n(\xi) = \frac{n!}{(\xi n)!((1-\xi)n)!}$$
(5.1)

відрізків із мірою

$$\mu_{\xi} = \Delta^{n}(\xi), \ \Delta(\xi) = p^{\xi} (1-p)^{1-\xi}, \qquad (5.2)$$

де  $\xi = k/n, k = 0,...,n.$ 

Міра M(x) вихідної фізичної величини, що міститься на відрізку [0, x] визначається за формулою

$$M(x) = \sum_{i=0}^{x(2^n-1)} \mu_i .$$
 (5.3)

Розподіл міри у біномному мультиплікативному процесі (5.3) задовольняє такі масштабні (скейлінгові) співвідношення:

$$M(x) = \begin{cases} pM(2x), & 0 \le x \le 1/2, \\ p + (1-p)M(2x-1), & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

а повна міра, як і очікувалося, задовольняє рівняння

$$M(1) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \mu_i = \sum_{\xi=0}^1 N_n(\xi) \Delta^n(\xi) = (\mu_0 + \mu_1)^n = 1.$$

 $N_n(\xi)$  відрізків довжиною  $\delta_n = 2^{-n}$ , які мають однакову міру  $\mu_{\xi}$ , утворюють деяку підмножину  $\Im_n(\xi)$  вихідного одиничного відрізка  $\Im$ .

У двійковому поданні *х*-координати лівих кінців відрізків множини  $\Im_n(\xi)$  описуються дробом із *п* знаками після коми. Цей дріб має після коми однакову кількість нулів  $k = \xi n$ . На границі  $n \to \infty$ , скінченні відрізки множини  $\Im_n(\xi)$  вироджуються у точки, які створюють множину  $\Im_{\xi}$ , а величина  $\xi$  дорівнює частці нулів після коми, якщо координати точки множини  $\Im_{\xi}$  подати двійковим дробом.

Доведемо, що  $\mathfrak{I}_{\xi}$  — фрактальна множина точок. Для цього покриємо  $\mathfrak{I}_{\xi}$  відрізками довжини б та створимо *D*-міру (3.1):

$$M_d(\mathfrak{I}_{\xi}) = \sum_{\mathfrak{I}_{\xi}} \delta^d = N_n(\xi) \delta^d .$$
(5.4)

При  $n \to \infty$ , використовуючи формулу Стірлінга (5.4), отримуємо

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \exp(-n).$$

İз (5.1) отримуємо такий наближений вираз для  $N_n(\xi)$ :

$$N_{n}(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi(1-\xi)}} \exp\{-n[\xi \ln \xi + (1-\xi)\ln(1-\xi)]\}.$$
 (5.5)

Беручи до уваги, що  $n = -\ln \delta / \ln 2$ , з точністю до логарифмічної поправки для міри (5.4) можна записати

$$M_d(\mathfrak{I}_{\xi}) \approx \delta^{-f(\xi)} \delta^d$$
, (5.6)

дe

$$f(\xi) = -\frac{\xi \ln \xi + (1 - \xi) \ln(1 - \xi)}{\ln 2}.$$
 (5.7)

Очевидно, що міра (5.6) при  $\delta \to 0$  залишається скінченною лише за умови  $d = f(\xi)$ . Унаслідок цього (див. параграф 3.3) фрак-

тальна розмірність  $D(\xi)$  множини  $\Im_{\xi}$  дорівнює  $f(\xi)$ . Вихідна множина  $\Im$  — це об'єднання підмножин  $\Im_{\xi}$ :

$$\mathfrak{I} = \bigcup_{\xi=0}^{1} \mathfrak{I}_{\xi}.$$

Оскільки кожний доданок в об'єднанні має власну фрактальну розмірність, що залежить від  $\xi$  і визначається за формулою (5.7), то для розподілу вихідної фізичної величини за множиною  $\Im$  доцільно користуватися терміном мультифрактал. Кожен з монофракталів входить до  $\Im$  з вагою ~ exp{ $nf(\xi)$ }. Отже, функція  $f(\xi)$  є спектральним розподілом монофракталів по мультифракталу.

Замість є більш зручно використовувати так званий показник Ліпшица—Ґьольдера а, який визначається так:

$$\mu_{\rm E} = \delta^{\alpha} \,. \tag{5.8}$$

Тут  $\mu_{\xi}$  — міра комірок множини  $\Im_{\xi}$ ,  $\delta = 2 - n$ . Беручи до уваги (5.7) і (5.8), для показника Ліпшица—Гьольдера знаходимо

$$\alpha(\xi) = \frac{\ln \mu_{\xi}}{\ln \delta} = -\frac{\xi \ln p + (1 - \xi) \ln(1 - p)}{\ln 2}.$$
 (5.9)

Показник Ліпшица—Ґьольдера залежить від ваги p, яка характеризує розподіл вихідної величини у мультиплікативному процесі. Для  $p \le 1$  існує нерівність

$$\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max} ,$$
  
$$\alpha_{\min} = \alpha(\xi = 0) = -\ln(1 - p)/\ln 2 ,$$
  
$$\alpha_{\max} = \alpha(\xi = 1) = -\ln(p)/\ln 2 .$$

Оскільки між параметрами  $\xi$  і  $\alpha$  існує взаємно однозначна відповідність (5.9), то множину  $\Im_{\xi}$  можна записати як  $\Im_{\alpha}$ . Міра M(x)(5.3) на множині  $\Im_{\alpha}$  має сингулярності з показником Ліпшица— Гьольдера  $\alpha$ . Множина  $\Im_{\alpha}$  — фрактальна, її фрактальна розмірність  $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$ .

Залежність  $f(\alpha)$ , яку зображено на рис. 5.1,*a*, має такі особливості. Похідна від  $f(\alpha)$  має вигляд

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\ln \xi - \ln(1-\xi)}{\ln p - \ln(1-p)}.$$
 (5.10)



РИС. 5.1. Фрактальна розмірність як функція показника Ліпшица—Ґьольдера (*a*) і узагальнені фрактальні розмірності біномного мультиплікативного процесу (*б*)

Максимальне значення цієї функції дорівнює одиниці і досягається у точці  $\alpha_0$ :

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 0 \implies \xi = \frac{1}{2} \implies$$
$$\implies \alpha_0 = -\frac{\ln p + \ln(1-p)}{2\ln 2},$$
$$f_{\text{max}} = f(\alpha_0) = 1. \quad (5.11)$$

Існує таке загальне твердження: максимальне значення фрактальних розмірностей підмножин  $\Im_{\alpha}$  дорівнює фрактальній розмірності носія міри. У нашому випадку міру було визначено на відрізку прямої, фрактальна розмірність якої дорівнює одиниці. У загальному випадку для мір, визначених на фракталах з розмірністю *D*, знаходимо  $f_{max}(\alpha) = D$ .

İснує ще одна характерна точка  $\alpha_1$  кривої  $f(\alpha)$ :

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1 \implies \xi = p \implies f(\alpha_{\rm I}) = \alpha_{\rm I} = D_{\rm I}, \qquad (5.12)$$

де 
$$D_{\rm I} = \frac{-p \ln p + (1-p) \ln(1-p)}{\ln 2}$$
 — інформаційна ентропія (п. 3.5.3)

біномного мультиплікативного процесу. У точці  $\alpha_1$  пряма, яку проведено з початку координат під кутом 45°, торкається кривої  $f(\alpha)$ .

Біномний мультиплікативний процес приводить до так званої концентрації міри на множині-носії. Це означає, що спочатку рівномірно розподілена на множині  $\Im$  міра зосереджується на деякій множині  $\Im_{\phi}$ .

Неважко помітити, що з урахуванням (5.2) та (5.5) повна міра, яку зосереджено у n-му поколінні на множині  $\Im_n(\xi)$ , має вигляд

$$M(\mathfrak{I}_n(\xi)) = N_n(\xi)\mu_{\xi} \approx$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\xi)}} \exp\left\{-n\left[\xi \ln \frac{\xi}{p} + (1-\xi)\ln \frac{1-\xi}{1-p}\right]\right\}.$$
 (5.13)

Розкладемо експоненціальну функцію у правій частині рівняння поблизу точки ξ = *p*. У цьому наближенні

$$M(\mathfrak{I}_{n}(\xi)) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} \exp\left\{-\frac{n}{2 p(1-p)} (\xi-p)^{2}\right\}$$
 (5.14)

і, що легко бачити, міра як функція  $\xi$  має розподіл з дисперсією  $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ . Цей розподіл в околі точки  $\xi = p$  має гострий пік, висота якого зі збільшенням *n* зменшується як  $n^{-1/2}$ .

Розглянемо множину

$$\mathfrak{I}_{\Phi} = \bigcup_{p-\sigma \leq \xi \leq p+\sigma} \mathfrak{I}_n(\xi).$$

Міру цієї множини легко обчислити. Дійсно, оскільки  $\xi = k/n$ , то  $\sum_{k} ... \rightarrow n \int d\xi ...$ 

Таким чином,

 $M(\mathfrak{I}_{\Phi}) \approx$ 

$$\approx \frac{2n}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} \int_{p}^{p+\sigma} d\xi \exp\left\{-\frac{n(\xi-p)^2}{2p(1-p)}\right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{1} dt \exp\left\{-t^2\right\} = 1. \quad (5.15)$$

Отже, на границі  $n \to \infty$  повна міра цілком зосереджена на множині  $\Im_{\Phi}$ , яка збігається із множиною  $\Im(\xi = p)$ .

У пункті 3.5.3 було введено розмірності Реньї порядку  $q - D_q$ , де величина q набувала цілі значення. Узагальнимо ці поняття на випадок нецілих значень  $q: q \in [-\infty, +\infty]$ .

Нехай, як і раніше (див. параграф 3.5), вихідна множина  $\Im$  буде подана дискретним набором точок. Розіб'ємо множину на  $N(\delta)$  відрізків розміром  $\delta$  і підрахуємо міру множини на кожному відрізку  $\mu_i$  як відношення кількості точок на *i*-му відрізку до загальної кількості точок. Визначимо показник маси  $\tau(q)$  за формулою

$$\tau(q) = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}, \qquad (5.16)$$

де  $N(q, \delta) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i^q$  — кількість відрізків, які містять вихідну мно-

жину ф. При q = 0 отримуємо, що  $N(q, \delta) = N(\delta)$  — кількість комірок, які утворюють покриття  $\Im$ , і  $\tau(0) = D$  — фрактальна розмірність. При q = 1, беручи до уваги, що повну міру нормовано  $\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1$ , отримуємо  $\tau(1) = 0$ .

Показник маси  $\tau(q)$  пов'язаний з кривою  $f(\alpha)$ , параметричне уявлення для якої має вигляд

$$\begin{cases} \alpha(q) = -\frac{d}{dq} \tau(q), \\ f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q). \end{cases}$$
(5.17)

Враховуючи позначення (3.15), для спектра фрактальних розмірностей знаходимо

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}.$$
 (5.18)

Функція D(q) є монотонно спадною на всій осі. Як і раніше, D(0) = D — фрактальна розмірність множини,  $D(1) = D_1$  — інформаційна розмірність,  $D(-\infty) = \alpha_{max}$ ,  $D(+\infty) = \alpha_{min}$ . Для рівномірно розподіленої у просторі міри спектр фрактальних розмірностей не залежить від q і дорівнює топологічній розмірності множини-носія  $D(q) = D_T$ .

Ураховуючи вираз (5.16) для показника розподілу маси  $\tau(q)$ , можемо перезаписати так:

$$(q-1)D(q) = \tau(q) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(q,\delta)}{\ln \delta}.$$
 (5.19)

У точці q = 1 вираз для показника маси має особливість, тому для цієї точки краще використати рівняння

$$D(1) = \tau(1) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\sum_i \mu_i(\delta) \ln \mu_i(\delta)}{\ln \delta}.$$

Максимальні значення показника степеня  $\alpha_{\max}$  характеризують області системи, де розподіл має найменші значення. Мінімальне значення показника степеня  $\alpha_{\min}$  відповідає масштабним (скейлінговим) властивостям найбільших сингулярностей в системі. На іншому, правому, кінці значень спектра  $f(\alpha)$  фрактальних розмірностей (рис. 5.1,*a*) для  $\alpha_{\min}$  отримуємо з урахуванням показника маси:  $\alpha_{\min} = \lim_{a \to x} d\tau(q) / dq$ .

Рівняння (5.17) можна розглядати як перетворення Лежандра, які дозволяють перейти від однієї пари незалежних змінних  $\alpha - f$  до іншої  $q - \tau$ . Довільний мультифрактал повністю визначається спектральною функцією  $f(\alpha)$  або еквівалентним до неї показником маси  $\tau(q)$ , або спектром фрактальних розмірностей D(q) (рис. 5.1,  $\delta$ ).

Наведений приклад мультифрактала є детерміністичним, оскільки в його основу було покладено біномний мультиплікативний процес. Ця концепція може бути узагальнена для стохастичних структур за аналогією з узагальненням монофрактала.

# частина 2

## ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛІВ У МАТЕМАТИЦІ, ФІЗИЦІ І АСТРОФІЗИЦІ

Успіх у застосуванні фрактальних моделей у фізиці обумовлений насамперед тим, що фрактальні форми притаманні великій кількості процесів та структур. Це не випадковість. Річ у тім, що багато моделей утворення та росту неупорядкованих об'єктів різної природи зводяться в кінцевому випадку до моделей перколяційного переходу [81] та обмеженої дифузією агрегації [80]. У першому випадку утворюється фрактальний перколяційний кластер, у другому — фрактальний агрегат. Моделі ж багатьох неупорядкованих процесів спираються на різноманітні варіанти випадкового блукання [84] або динамічного хаосу [15, 28], які також мають фрактальні властивості. По суті, Мандельброт відкрив математичний вираз для надзвичайно загальної закономірності, що торкається геометричних властивостей фізичного світу.

Фізичним прикладом фрактала можуть бути кластери гелів, що утворюються при злитті золів. У твердому тілі фрактальні структури дефектів виникають, наприклад, у процесі проходження важких частинок через кристал. Принципово важливим прикладом є дефектні структури у твердих тілах, що піддаються інтенсивному зовнішньому навантаженню, яке приводить до значної густини дефектів. Внаслідок цього виявляються колективні ефекти, які приводять до включення нових структурних рівнів пластичної деформації. Її носії утворюють спочатку фрактальні кластери, компактизація яких призводить потім до оформлення супердефектів, які є структурними елементами на новому рівні [69].

Зараз добре відомо, що фрактали зустрічаються в багатьох фізичних процесах та явищ. Можна сказати, що ідея фракталів була висунута досить вчасно: сам розвиток науки йшов назустріч фракталам. Перші приклади (форма хмар, порізаних узбереж материків, складні форми в живій та неживій природі) не одразу зацікавили широкий круг дослідників. Ситуація змінилась після того, як з'ясувалося, що в багатьох задачах фрактальна структура та розмірність є основними характеристиками системи. Так, у турбулентності теорія фракталів тісно пов'язана з теорією масштабної інваріантності Колмогорова. Якщо розглянути швидкість турбулентного потоку як функцію просторових змінних та часу, то вона являє собою фрактал такого ж по суті типу, що і броунівська крива, хоча з дещо іншими локальними властивостями.

У теорії динамічних систем з'явились "дивні атрактори". За задумом авторів цього поняття Рюеля і Такенса дивні атрактори складаються з таких рішень систем диференціальних рівнянь, які не заповнюють жодної області, а утворюють складну "дірчасту" структуру, тобто є фракталами. Їх фрактальність й уловлює властивості цієї структури. Різні зміни поняття фрактальної розмірності, її знаходження за результатами експерименту перетворилось в самостійну галузь теорії динамічних систем.

Далі, в теорії фракталів багато точок дотиків з методом ренормгрупи та теорією фазових переходів. У статистичній фізиці метод ренормгрупи виділяє розподіл ймовірностей, що інваріантні відносно дії групи масштабних перетворень. Такі розподіли, як правило, зосереджені на фракталах. Це означає, що флуктуації температури, густини і т. ін., як функції просторових змінних, також належать до числа фракталів.

Використання гіпотетичного простору з ультраметричною топологією дозволило в останній час пояснити поведінку структур, що ієрархічно підпорядковані та виникають у спіновому [6, 50] та структурному [70] склі, в процесі пластичної деформації й руйнування [79], при структурних [71] та, зокрема, в мартенситних [72] перетвореннях, в ВТНП-оксидах [70] і т. д.

Більш докладно вступ у теорію фракталів та приклади її конкретних застосувань у фізиці містять у собі праці [81, 80, 88, 76, 44, 67, 73, 59, 75, 47].

## Розділ б\_\_\_\_\_ дробовий інтеграл і дробова похідна

Розглянемо понятття дробового інтеграла і дробової похідної, що широко використовуються у математиці, та виявимо зв'язок цих понять з фракталами. Послідовне та систематичне викладення узагальнення поняття диференціювання та інтегрування з цілих порядків на дробові проведено в праці [77].

Оскільки для введення понять та розгляду основних властивостей і фізичної інтерпретації дробового інтегро-диференціювання не треба досконалого математичного викладення теорії дробового інтеграла та похідної, обмежимося у передмові до розділу коротким історичним оглядом цього питання.

Разом з утворенням поняття диференціювання  $d^p f(x)/dx^p$  виникла думка про його узагальнення на нецілі значення *p*. Уперше ця ідея була реалізована у працях Л. Ейлера (1738), який увів операцію дробового диференціювання для степеневої функції ( $f(x) = x^a$ ). П. Лаплас (1812) розробив методику дробового диференціювання функцій, що мають вигляд інтеграла f(x) ==  $[T(t)\exp\{-xt\}dt$ .

Означення похідної будь-якого додатного порядку від функції достатньо загального вигляду ввів Ж. Фур'є (1822), який запропонував використовувати рівняння

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(t x - t \lambda + p \pi/2) dt.$$

Систематична розробка теорії дробового інтегрування та диференціювання почалася з праць Н. Абеля (1823) і Ж. Ліувілля (1832).

Ліувілль увів означення оператора дробової похідної ( $\hat{D}^{p} \equiv d^{p}/dx^{p}$ ) при будь-якому, у тому числі й комплексному, *р* для

функцій, які мають вигляд ряду  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp\{a_k x\}, \quad \hat{D}^p f(x) =$ 

 $=\sum_{k=0}^{\infty}c_ka_k^p\exp\{a_kx\}$ . Очевидно, що застосовування цього означен-

ня обмежене збіжністю ряду.

Крім того, Ліувілль увів операцію, обернену до операції дробового диференціювання, за правилом:

$$\hat{D}^{-p}f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty f(x+t) t^{p-1} dt, \text{ Re } p > 0,$$

де  $\Gamma(p)$  — гамма-функція, яка називається ліувіллівською формою дробового інтеграла. У своїх працях Ліувілль також вперше застосував поняття дробового інтеграла і похідної до розв'язання деяких типів звичайних диференціальних рівнянь, а також до задач із геометрії, механіки, фізики та ін.

Велике значення для розвитку теорії дробового інтегро-диференціювання мають праці Б. Рімана (1847), в яких він дійшов такої форми дробового інтеграла:  $\hat{D}^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-p}}, x > 0$ ,

яка, разом з конструкцією Ліувілля, є однією з основних форм дробового інтегрування.

Подальший розвиток теорія дробового інтегро-диференціювання отримала у працях Х. Холомгрена (1866), А. Грюнвальда (1867), А.В. Лєтнікова (1868), в яких уперше операції дробового інтегрування та диференціювання розглядались як взаємнообернені. Було отримано формули дробової похідної від добутку функцій, введено поняття дробового інтегрування однієї функції за іншою функцією, розглянуто частинні та змішані дробові інтеграли функції двох змінних, розвинута ідея дробової похідної як межі різницевого відношення дробового порядку.

Подальше узагальнення поняття дробового інтегро-диференціювання пов'язане з теорією аналітичних функцій комплексної площини. Тут слід зазначити праці М.Я. Соніна (1872), який узагальнив формулу дробового інтегрування Рімана на випадок інтегрування за скінченним відрізком комплексної площини, і працю Ж. Адамара (1892), який увів поняття дробової похідної від аналітичної функції через почленне диференціювання її ряду Тейлора:

$$\hat{D}^{p}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} C_{k} (z-z_{0})^{k-p}, \quad C_{k} = \frac{f^{(k)}(z_{0})}{k!}$$

і конструкцію дробового інтегрування у формі

$$\hat{I}^{p}f(z) = \frac{z^{p}}{\Gamma(p)} \int_{0}^{1} (1-\xi)^{p-1} f(z\xi) d\xi,$$

яка може бути використана для достатньо довільних функцій.

Подальший розвиток теорії інтегро-диференціювання пов'язаний з іменами Г. Харді і М. Ріса (1915), які використовували операцію дробового інтегрування при сумуванні розбіжних рядів, та Г. Вейля (1917), який визначив поняття дробового інтегрування для періодичних функцій. Удосконалення поняття інтегродиференціювання на початку XX століття пов'язане з бурхливим розвитком теорії інтеграла Лебега.

#### 6.1. ПОНЯТТЯ ДРОБОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДРОБОВОГО ІНТЕГРАЛА ТА ПОХІДНОЇ

Поняття дробового інтеграла можна ввести шляхом узагальнення формули для *n*-кратного інтеграла:

$$\int_{a}^{x} dx \int_{a}^{x} dx \dots \int_{a}^{x} dx \varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt .$$

Права частина є справедливою і при нецілих значеннях n, якщо врахувати, що  $(n - 1)! = \Gamma(n)$ , де  $\Gamma(n)$  — гамма-функція, яка визначається співвідношенням

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} x^{z-1} \exp\{-x\} dx, \text{Re } z > 0.$$
 (6.1)

Інтегралами дробового порядку *α* >0 (ліво- і правобічним відповідно) називається конструкція вигляду

$$\hat{I}_{a+}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a , \qquad (6.2)$$

$$\hat{I}^{\alpha}_{b-}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b.$$
(6.3)

Інтеграли (6.2) і (6.3) прийнято також називати дробовими інтегралами Рімана—Ліувілля або операторами дробового інтегрування. Між операторами дробового інтегрування існує зв'язок:

$$Q\hat{I}_{a+}^{\alpha} = \hat{I}_{b-}^{\alpha}Q, \quad Q\hat{I}_{b-}^{\alpha} = \hat{I}_{a+}^{\alpha}Q, \quad (6.4)$$

де Q — оператор відбивання, визначений співвідношенням  $Q\varphi(x) = \varphi(a + b - x)$ .

Існує також формула дробового інтегрування за частинами:

$$\int_{a}^{b} \varphi(x) \hat{I}_{a+}^{\alpha} \psi(x) dx = \int_{a}^{b} \psi(x) \hat{I}_{b-}^{\alpha} \varphi(x) dx , \qquad (6.5)$$

яка справедлива за обмежень

$$\varphi(x) \in L_p, \quad \psi(x) \in L_g, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{g} \le 1 + \alpha, \quad p, g \ge 1.$$

Цю формулу можна довести шляхом безпосередньої перестановки порядку інтегрування у лівій частині за формулою Діріхле:

$$\int_{a}^{b} dx \int_{a}^{x} f(x, y) dy = \int_{a}^{b} dy \int_{y}^{b} f(x, y) dx , \qquad (6.6)$$

яка є окремим випадком теореми Фубіні і справедлива, якщо хоча б один з інтегралів у (6.6) абсолютно збігається.

Крім перелічених вище властивостей, оператор дробового інтегрування задовольняє співвідношенням

$$\hat{I}_{b\pm}^{\alpha}\hat{I}_{b\pm}^{\beta}\phi = \hat{I}_{b\pm}^{\alpha+\beta}\phi, \ \alpha,\beta > 0, \qquad (6.7)$$

які справедливі в кожній точці, якщо  $\varphi(x) \in L_1([a, b])$  та  $\alpha + \beta \ge 1$ .

Операцію дробового диференціювання будемо вводити як обернену до операції дробового інтегрування. Для цього необхідно вивести формули, обернені до (6.2), (6,3).

Нехай

$$\left(\hat{I}_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = f(x). \tag{6.8}$$

Формулу обернення виведемо у припущенні  $0 < \alpha < 1$ . Підставляючи у (6.8) означення дробового інтеграла (6.2) та виконуючи в лівій частині отриманого виразу заміну t = s, x = t, помножуючи обидві частини рівняння на  $(x - t)^{-\alpha}$  та виконуючи інтегрування за t, одержуємо

$$\int_{a}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_{a}^{t} \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_{a}^{x} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

8\*

Замінимо в лівій частині отриманого виразу порядок інтегрування за формулою Діріхле (6.6):

$$\int_{a}^{x} \varphi(s) ds \int_{s}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\alpha} (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_{a}^{x} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Виконуючи в лівій частині отриманого виразу заміну  $t = s + \tau(x - s)$ , одержуємо такий вираз для внутрішнього інтеграла:

$$\int_{s}^{x} (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt = \int_{0}^{1} \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{-\alpha} d\tau = \mathbf{B}(\alpha, 1-\alpha) = \mathbf{\Gamma}(\alpha) \mathbf{\Gamma}(1-\alpha).$$

Таким чином,  $\int_{a}^{x} \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}.$ 

Після диференціювання лівої та правої частин отриманого виразу за *х* знаходимо формулу обернення (6.8):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \,. \tag{6.9}$$

Вираз (6.9) отримано за умови  $0 < \alpha < 1$ . Випадок  $\alpha = 1 \epsilon$  очевидним. Випадок  $\alpha > 1$  зводиться до випадку  $0 < \alpha < 1$  шляхом диференціювання обох частин рівняння (6.8).

Обернення рівняння (6.3) розглядається у такий самий спосіб.

Враховуючи (6.9), визначаємо ліво- та правобічну дробові похідні порядку  $0 \le \alpha \le 1$  (похідні Рімана—Ліувілля) функції  $f(x) \in L_1([a, b])$ :

$$\hat{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},$$
(6.10)

$$\hat{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{b}\frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}.$$
(6.11)

Дробові похідні великих порядків  $\alpha > 1$  вводяться у такий спосіб.

Нехай  $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ , де  $[\alpha]$ ,  $\{\alpha\}$  — ціла й дробова частини числа  $\alpha$  відповідно. Якщо під дробовою похідною порядку  $\alpha$  для цілого  $\alpha$  розуміти звичайне  $\alpha$ -кратне диференціювання, то для дробової похідної з довільним значенням  $\alpha$  можна записати

$$\hat{D}_{a+}^{\alpha}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\hat{D}_{a+}^{\{\alpha\}}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\hat{I}_{a+}^{[-\{\alpha\}}f,$$

$$\hat{D}_{b-}^{\alpha}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\hat{D}_{b-}^{\{\alpha\}}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\hat{I}_{b-}^{1-\{\alpha\}}f.$$

Таким чином,

$$\hat{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-\alpha+1}}, \qquad (6.12)$$

$$\hat{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},$$
(6.13)

де  $n = [\alpha] + 1$ .

Як приклад розглянемо дробову похідну функції  $f(x) = (x - -a)^{\mu}$ ,  $0 \le \mu \le 1$ . Використовуючи означення (6.10), після безпосереднього обчислення отримуємо

$$\hat{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}.$$
(6.14)

Зокрема, якщо  $\mu = 1 - \alpha$ , то

$$\bar{D}_{a+}^{\alpha}f(x) \equiv 0 , \qquad (6.15)$$

тобто функція  $(x - a)^{\alpha - 1}$  для дробової похідної відіграє таку саму роль, що й стала величина для операції звичайного диференціювання.

Знайдена дробова похідна (6.14) буде інтегровною функцією, якщо  $\mu + \alpha < 1$ . У загальному випадку функція f(x) з інтегровною сосбливістю в точці *a* буде мати інтегровну дробову похідну  $\hat{D}_{a+}^{\alpha}f$ , якщо порядок особливості у f(x) менший за  $1 - \alpha$ .

У випадку довільних  $\alpha > 0$  вираз (6.15) є справедливим, якщо

$$f(x) = (x - a)^{\alpha - k}, \ k = 1, 2, ..., 1 + [\alpha].$$
 (6.16)

Введені вище операції дробового інтегро-диференціювання є справедливими і при комплексних значеннях  $\alpha$  (Re  $\alpha > 0$ ). У цьому випадку інтеграли і похідні комплексного порядку є аналітичним продовженням за параметром  $\alpha$  операторів, визначених при Іт  $\alpha = 0$ . У випадку дійсного порядку між операторами дробового інтегрування й диференціювання не існує суттєвої різниці.

Операції звичайного диференціювання й інтегрування є взаємно оберненими, тобто  $\frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \varphi(t) dt = \varphi(x)$ . Однак зворотне тлумачення не є справедливим, тобто  $\int_{a}^{x} \frac{d}{dt} \varphi(t) dt \neq \varphi(x)$ , оскільки

з'являється стала  $\varphi(a)$ . Для повторних операцій  $\frac{d^n}{dx^n} \hat{I}_{a+}^n \varphi = \varphi$ , але

 $\hat{I}_{a+}^{n}\varphi^{(n)} \neq \varphi$ , відрізняючись від  $\varphi$  многочленом порядку n-1. Аналогічно для дробових інтегралів і похідних  $\hat{D}_{a+}^{\alpha}\hat{I}_{a+}^{\alpha}\varphi \equiv \varphi$ , але  $\hat{I}_{a+}^{\alpha}\hat{D}_{a+}^{\alpha}\varphi$  відрізняється від  $\varphi$  на функції вигляду  $(x-a)^{\alpha-k}$ ,  $k = 1,2,...,1 + [\alpha]$ , які відповідно до (6.15), (6,16) відіграють роль многочленів для операції дробового диференціювання.

Дробові інтеграли, введені за формулами (6.2) і (6.3) на скінченному відрізку [*a*, *b*], легко узагальнюються на випадок усієї осі. Такі інтеграли позначимо так:

$$\hat{I}^{\alpha}_{+}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$\hat{I}^{\alpha}_{-}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$
(6.17)

Аналогічно можна ввести ліувілльські похідні (6.10), (6.11):

$$\hat{D}^{\alpha}_{+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},$$
$$\hat{D}^{\alpha}_{-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}},$$
(6.18)

де  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Якщо ввести функції

$$t_{+}^{\alpha} = \begin{cases} t^{\alpha}, t > 0, \\ 0, t < 0, \end{cases} \quad t_{-}^{\alpha} = \begin{cases} 0, t > 0, \\ |t|^{\alpha}, t < 0, \end{cases}$$

то операції (6.17), (6.18) можна записати у вигляді згортки:

$$(\hat{I}_{\pm}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t_{\pm}^{\alpha-1} f(x-t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} f(x \mp t) dt ,$$

$$(\hat{D}_{\pm}^{\alpha}f)(x) = \frac{(\pm 1)^{n}}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{\infty} t^{n-\alpha-1} f(x \mp t) dt, n = [\alpha] + 1 .$$

$$(6.19)$$

Для наведених вище дробових інтегралів і похідних на всій осі справедливі переставні співвідношення з операторами відбиття:

$$Q \varphi(x) = \varphi(-x), \quad Q \hat{I}^{\alpha}_{\pm} \varphi = \hat{I}^{\alpha}_{\mp} Q \varphi, \quad -\infty < x < \infty,$$

операторами зсуву:

$$T_h \varphi(x) = \varphi(x-h), \quad T_h \hat{I}^{\alpha}_{\pm} \varphi = \hat{I}^{\alpha}_{+} T_h \varphi, \quad -\infty < x, h < \infty$$

та операторами розтягу:

$$\Pi_{\delta}\varphi(x) = \varphi(\delta x), \quad \Pi_{\delta}\hat{I}_{\pm}^{\alpha}\varphi = \delta^{\alpha}\hat{I}_{\pm}^{\alpha}\Pi_{\delta}\varphi, \quad -\infty < x < \infty, \delta > 0$$

Крім того, справедлива формула дробового інтегрування за частинами, аналогічна (6.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \hat{I}_{+}^{\alpha} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \hat{I}_{-}^{\alpha} \varphi(x) dx \qquad (6.20)$$

та формула дробового диференціювання за частинами, що виходить з (6.20) після заміни  $\hat{I}_{+}^{\alpha}\psi = g$ ,  $\hat{I}_{-}^{\alpha}\phi = f$  і врахування властивостей взаємно оберненості операцій дробового диференціювання й інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{D}_{+}^{\alpha} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \hat{D}_{-}^{\alpha} f(x) dx . \qquad (6.21)$$

#### 6.2. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДРОБОВИХ ІНТЕГРАЛІВ І ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ

У загальному випадку одновимірне інтегральне перетворення можна подати у вигляді згортки:

$$\hat{K}\varphi(t) = \left(\hat{K}\varphi\right)(x) = \int_{0}^{\infty} k(x,t)\varphi(t) dt = g(x), \qquad (6.22)$$

де ядром перетворення k(x, t) є задана функція. Функція  $\varphi(t)$  називається оригіналом, а g(x) — образом перетворення.

У класі інтегральних перетворень типу згортки (6.22) найважливішими є:

• перетворення Лапласа ( $k(x,t) = \exp(-xt)$ );

 $\circ$  синус та косинус перетворення Фур'є ( $k(x,t) = \sin(xt)$ ,  $k(x,t) = \cos(xt)$ );

• перетворення Ганкеля ( $k(x, t) = \sqrt{xt} J_{y}(xt)$ );

• перетворення Стілтьєса ( $k(x,t) = \Gamma(p)(x+t)^{-p}$ ).

До цього класу перетворень належать також інтеграли дробового порядку Рімана—Ліувілля (6.19) з  $k(x,t) = -(x-t)^{\alpha-1}_{+}/\Gamma(\alpha)$ .

У випадку нескінченних границь інтегрування в (6.22) існують перетворення Фур'є ( $k(x,t) = \exp(ixt)$ ) та Мелліна ( $k(x,t) = t^{x-1}$ ).

Поширимо дію інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа та Мелліна на дробові інтеграли та похідні.

Перетворення Фур'є функції  $\varphi(t)$  дійсного аргументу визначимо співвідношенням

$$\hat{F}\phi(t) \equiv \left(\hat{F}\phi\right)(x) = \hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\phi(t)dt = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}-1}{it}\phi(t)dt .$$
(6.23)

Обернене перетворення Фур'є здійснюється за формулою:

$$\left(\widehat{F}^{-1}g\right)(t) = \widetilde{g}(t) = \frac{\widehat{g}(-t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}g(x)dx$$

İз урахуванням введених позначень справедливими є такі співвідношення:

$$\left(\hat{F}\hat{I}_{\pm}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \left(\mp ix\right)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \quad (6.24)$$

де

$$(\mp ix)^{\alpha} = \exp\left\{\alpha \ln|x| \mp \frac{\alpha \pi i}{2} \operatorname{sign} x\right\}.$$

Аналогічно можна довести, що дія перетворення Фур'є (6.23) на оператор дробового диференціювання (6.18) має вигляд

$$\left(\hat{F}\hat{D}^{\alpha}_{\pm}\phi\right)(x) = (\mp ix)^{\alpha}\hat{\phi}(x), \operatorname{Re}\alpha \ge 0.$$
 (6.25)

Для перетворення Лапласа будемо використовувати позначення

$$\hat{L}\varphi(t) \equiv \left(\hat{L}\varphi\right)(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt}\varphi(t)dt .$$
(6.26)

Обернене перетворення Лапласа має вигляд

$$\left(\hat{L}^{-1}g\right)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} p - i\infty}^{\operatorname{Re} p + i\infty} e^{pt} g(p) dp, \quad \operatorname{Re} p > p_0.$$
(6.27)

Справедливою є теорема про згортку:

$$\hat{L}[h * g]_L = \hat{L}h \cdot \hat{L}g , \qquad (6.28)$$

де операція згортки для перетворення Лапласа визначається виразом

$$[h * g]_L(t) = \int_0^t h(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau . \qquad (6.29)$$

Неважко помітити, що інтеграл дробового порядку (6.2) є згорткою Лапласа вигляду

$$(\hat{I}_{0+}^{\alpha}\phi)(x) = \left[\phi(x)*\frac{x_{+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]_{L}, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Таким чином, згідно з теоремою про згортку (6.28), отримуємо формулу перетворення Лапласа дробового інтеграла:

$$\left(\hat{L}\hat{I}^{\alpha}_{0+}\varphi\right)(p) = p^{-\alpha}\left(\hat{L}\varphi\right)(p).$$
(6.30)

Таким чином, як це випливає з формул (6.24), (6.30), інтегрування дробового порядку  $\alpha$  в образах Фур'є і Лапласа зводиться до множення на степеневу функцію ( $\mp ix$ )<sup>- $\alpha$ </sup> і  $p^{-\alpha}$  відповідно.

Перетворення Мелліна будемо визначати за формулою

$$\hat{M}\varphi(s) = \varphi^{*}(s) = \int_{0}^{\infty} t^{s-1}\varphi(t)dt$$
. (6.31)

Обернене перетворення Мелліна має вигляд

$$\hat{M}^{-1}\phi^{*}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re}\,s-i\infty}^{\text{Re}\,s+i\infty} \phi^{*}(x) x^{-s} ds \,. \tag{6.32}$$

Дія перетворення Мелліна на дробові інтеграли приводить до рівнянь

$$\hat{M}\hat{I}^{\alpha}_{+}f(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}f^{*}(s), \quad \operatorname{Re}(\alpha+s) < 1,$$
$$\hat{M}\hat{I}^{\alpha}_{-}f(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\alpha+s)}f^{*}(s), \quad \operatorname{Re}(s) < 1.$$

121

Слід зазначити, що дробові інтеграли (6.19) при фіксованому значенні  $x \in$  перетвореннями Мелліна (6.31) функцій  $f(x \mp t)$ . Використовуючи формулу обернення перетворення Мелліна (6.32), можна задати вихідну функцію через її дробові інтеграли:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\alpha - i\infty}^{\operatorname{Re}\alpha + i\infty} \Gamma(\alpha) \hat{I}_{\pm}^{\alpha} f(x) |x - \tau|^{-\alpha} d\alpha, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

У правій частині знаки "+" і "-" стосуються  $x > \tau$  і  $x < \tau$ відповідно. Результат у правій частині отриманого виразу не повинен залежати від x. Тоді для окремого випадку x = 0 отримуємо

$$f(\pm \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\alpha-i\infty}^{\operatorname{Re}\alpha+i\infty} \Gamma(\alpha) \hat{I}_{\pm}^{\alpha} f(0) \tau^{-\alpha} d\alpha, \quad \tau > 0.$$

Отже, деяку функцію можна відновити за значенням її дробових інтегралів тільки в одній точці, якщо останні відомі для усіх  $\alpha$  уздовж деякої прямої Re  $\alpha = \alpha_0 > 0$ .

## 6.3. ВИКОРИСТАННЯ КОНЦЕПЦІЇ ДРОБОВОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як приклад використання концепції дробового інтегро-диференціювання розглянемо один із методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь цілого порядку.

Нехай задане рівняння 2-го порядку має вигляд

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді дробової похідної:

$$y(x)=\hat{D}_{a+}^p z(x).$$

Використовуючи визначення операції дробового диференціювання, можна показати, що виконуються такі співвідношення:

$$x\hat{D}_{a+}^{p+1}z = \hat{D}_{a+}^{p+1}(xz) - (p+1)\hat{D}_{a+}^{p}z,$$

 $x\hat{D}_{a+}^{p+2}z = \hat{D}_{a+}^{p+2}(x^2z) - 2(p+2)\hat{D}_{a+}^{p+1}(xz) + (p+1)(p+2)\hat{D}_{a+}^{p}z.$ 

Враховуючи ці властивості, вихідне рівняння набуває вигляду

$$\hat{D}_{a+}^{p+2} \Big[ a_2 + b_2 x + c_2 x^2 \Big] z + \hat{D}_{a+}^{p+1} \Big[ a_1 + b_1 x - 2c_2 (p+2) x - b_2 (p+2) \Big] z + \\ + \hat{D}_{a+}^{p} \Big[ a_0 - b_1 (p+1) + c_2 (p+1) (p+2) \Big] z = 0.$$

Будемо шукати розв'язок рівняння у класі функцій, які задовольняють умову z(a) = z'(a) = 0, і інтегровних на довільному скінченному інтервалі.

У цьому класі функцій справедливі співвідношення

$$\hat{D}_{a+}^{p} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \hat{D}_{a+}^{p} = \hat{D}_{a+}^{p+1}$$

і вихідне рівняння можна подати так:

$$\hat{D}_{a+}^{p} \left\{ \frac{d}{dx} \left[ \frac{d}{dx} \left( a_{2} + b_{2}x + c_{2}x^{2} \right) + a_{1} + \right. \\ \left. + b_{1}x - 2c_{2}(p+2)x - b_{2}(p+2) \right] + \left. + a_{0} - b_{1}(p+1) + c_{2}(p+1)(p+2) \right] + \right\} z = 0.$$

Якщо параметр *р* визначити як один із розв'язків алгебраїчного рівняння

$$a_0 - b_1(p+1) + c_2(p+1)(p+2) = 0$$
,

то отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx}[a_2+b_2x+c_2x^2]=z[a_1+b_1x-(p+1)(b_2+c_2x)],$$

розв'язок якого можна знайти методом розділення змінних.

Окремим випадком запропонованого вище рівняння є випадок з  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ,  $c_2 = -1$ ,  $a_1 = c$ ,  $b_1 = -(a + b + 1)$ ,  $a_0 = -ab -$ це так зване гіпергеометричне рівняння. Для цього рівняння запропонований метод дає такі власні значення порядку інтегрування:  $p_1 = a - 1$ ,  $p_2 = b - 1$ . Для першого з цих значень розв'язок має вигляд

$$y(x) = D_{+}^{a-1} x^{a-c} (1-x)^{c-b-1} =$$
  
=  $\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)} x^{1-c} {}_{2}\Gamma_{1}(1+a-c,1+b-c;2-c;x),$ 

де <sub>2</sub> $\Gamma_1$  — гіпергеометрична функція. Отриманий вираз є також поданням гіпергеометричної функції через дробовий інтеграл.

#### 6.4. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФРАКТАЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ КАНТОРА І ДРОБОВИМ ІНТЕГРАЛОМ

Між введеними вище операторами дробового інтегрування (параграф 6.1) і фрактальною множиною Кантора (параграф 2.2) існує зв'язок.

Для встановлення цього зв'язку введемо східчасту функцію:

$$\eta(t_1 < \tau < t_2) = \chi(\tau - t_1) - \chi(\tau - t_2) = \begin{cases} 1, \ \tau \in [t_1, t_2], \\ 0, \ \tau \notin [t_1, t_2], \end{cases}$$
(6.33)

тут  $\chi(x)$  — одинична функція Хевісайда.

Застосувавши перетворення Лапласа (6.26) до функції (6.33), отримаємо

$$\hat{L}\eta(t_1 < \tau < t_2) = f(p) = \frac{1}{p} \left[ \exp\{-pt_1\} - \exp\{-pt_2\} \right].$$
(6.34)

Скориставшись процедурою побудови множини Кантора, зауважимо, що на першому кроці побудови ця множина має вигляд  $[0, \xi_t] \cup [(1 - \xi)t, t]$ , якщо генератор обирається у вигляді відрізка довжини t, а масштабний множник дорівнює  $\xi$ . Густина станів, що залишилися, дорівнює  $(2\xi t)^{-1}$ . Ця густина отримується з умови нормування станів, що залишилися, на одиницю. Тобто вважається, що множина Кантора отримується методом згортання (див. параграф 2.8) і загальна міра будь-якої фізичної величини, яку спочатку було рівномірно розподілено на відрізку [0, t], зберігається і рівномірно розподіляється на відрізках, що залишилися, на всіх кроках побудови множини Кантора.

На другому етапі будування множина Кантора має вигляд

$$[0,\xi^2t] \cup [\xi(1-\xi)t,\xi t] \cup [(1-\xi)t,(1-\xi+\xi^2)t] \cup [(1-\xi^2)t,t],$$

а густина станів визначається виразом  $(2\xi)^{-2}t^{-1}$ .

Позначимо  $r_{m}^{(N)}$ , m = 1, 2, ..., кінці відрізків множини Кантора на *N*-му етапі побудови. Тоді на (N + 1)-му етапі координати меж множини Кантора можуть бути визначені за такими рекурентними співвідношеннями:

а для густини станів можна записати  $(2\xi)^{-(N+1)}t^{-1}$ .

Доведемо, що при  $N \to \infty$  за умови, що нормування сумарної площини під смужками множини Кантора, що залишилися, зберігається, множина Кантора збігається до дробового інтеграла, показник якого збігається з фрактальною розмірністю множини Кантора.

Розглянемо деяку фізичну величину f(t), розподілену на множині Кантора. Для середнього значення цієї величини  $J(t) = \langle f \rangle_t$  на проміжку t на N-му етапі побудови множини Кантора можна записати

$$J(t) = \frac{1}{(2\xi)^{N} t} \int_{0}^{t} d\tau \sum_{m=1}^{2^{N}} \eta \left( t_{m}^{(N)} < \tau < t_{m+1}^{(N)} \right) f(\tau), \qquad (6.36)$$

лапласівський образ якого із урахуванням (6.34) має вигляд

$$\bar{L}J(t) = \Phi(p) = \frac{1 - \exp\{-pt\xi^N\}}{(2\xi)^N pt} \sum_{m=1}^{2^N} \exp\{-pt_m^{(N)}\}F(p), \qquad (6.37)$$

де  $\widehat{L}f(t) = F(p)$ .

Перетворимо суму, що входить до виразу (6.37). Для перетворення Лапласа східчастої функції (6.34) на *n*-му етапі побудови множини Кантора запишемо:

$$\hat{L}\eta(t_k^{(n)} < t < t_{k+1}^{(n)}) = \frac{1}{p} \exp\{-pt_k^{(n)}\}[1 - \exp\{-p\Delta_n\}],\$$

дe

$$\Delta_n = t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} = \xi^n t \tag{6.38}$$

є ширина смуги.

Для (*n* + 1)-го етапу побудови отримуємо

$$\hat{L}\Big[\eta(t_k^{(n)} < t < t_k^{(n)} + \Delta_{n+1}\Big) + \eta(t_k^{(n)} + \Delta_n - \Delta_{n+1} < t < t_k^{(n)} + \Delta_n\Big)\Big] = \\
= \frac{1 - \exp\{-p\Delta_{n+1}\}}{p} \exp\{-pt_k^{(n)}\}[1 + \exp\{-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})\}].$$

Повторюючи цю процедуру і використовуючи зв'язок між координатами меж множини Кантора (6.35), отримуємо

$$\widehat{L}_{k=1}^{2^{N}} \eta \left( t_{k}^{(N)} < t < t_{k}^{(N)} \right) = \frac{1 - \exp\{-p\Delta_{N}\}}{p} \prod_{k=1}^{N-1} \left[ 1 + \exp\{-p(\Delta_{k-1} - \Delta_{k})\} \right].$$
(6.39)

Підставляючи вираз (6.39) у (6.36) і враховуючи (6.38), співвідношення (6.37) можна перетворити на таке:

$$\Phi(p) = \frac{1 - \exp\{-pt\xi^N\}}{pt\xi^N} Q_N(pt(1-\xi))F(p), \qquad (6.40)$$

де

$$Q_N(z) = 2^{-N} \prod_{k=0}^{N-1} \left[ 1 + \exp\{-z\xi^n\} \right], \quad z = pt(1-\xi).$$
(6.41)

Для великих N,  $\left| pt \xi^{N} \right| << 1$ , із (6.40) знаходимо

$$\mathbb{P}(p) = \mathcal{Q}_N(pt(1-\xi))F(p). \tag{6.42}$$

Функція  $Q_N$  (6.41) задовольняє співвідношення:

$$Q_N\left(\frac{z}{\xi}\right) = \frac{1 + \exp\{-z/\xi\}}{2}Q_{N-1}(z).$$
(6.43)

Аналіз одержаного співвідношення показує, що на інтервалі

$$\frac{\xi}{1-\xi} < |pt| < \frac{1}{\xi}, 0 < \frac{\tau}{t} < 1,$$
(6.44)

для функції  $Q_N$  (6.43) є справедливим рівняння

$$Q_N(z/\xi) \cong Q_{N-1}(z).$$
 (6.45)

Нехай  $\overline{Q}(z) = \lim_{N \to \infty} Q_N(z)$ . Враховуючи, що  $0 < \left| \exp\{-pt\xi^N(1-\xi)\} \right| < < 1$ , можна зробити висновок, що для будь-якого *pt* виконується співвідношення  $0 < \overline{Q}(z) < 1$ .

Отже, на границі великих N з функціонального рівняння (6.45) отримуємо

$$\overline{Q}(z/\xi) \cong \overline{Q}(z)/\xi.$$
(6.46)

Розв'язок одержаного функціонального рівняння знаходиться аналогічно розв'язку рівняння (1.2) і має вигляд

$$\overline{Q}(z) = A_{\nu} z^{-\nu}, \ \nu = \frac{\ln 2}{\ln(1/\xi)},$$
 (6.47)

де v — фрактальна розмірність (розмірність подібності, параграф 1.2) множини Кантора. Таким чином, доведено, що в області проміжної асимптотики |pt| (6.44) функція  $\Phi(p)$  (6.42) набуває форми

$$\Phi(p) \cong A_{\nu}(1-\xi)^{-\nu}(pt)^{-\nu}F(p).$$
(6.48)

Лапласівський образ (6.48) функції (6.36), (6.37) згідно з (6.17) може бути поданий у вигляді дробового інтеграла:

$$J(t) = \frac{A_{v}}{|t(1-\xi)|^{v} \Gamma(v)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{v-1} f(\tau) d\tau =$$
  
=  $\frac{A_{v}}{|t(1-\xi)|^{v} \Gamma(v)} \int_{0}^{1} (t-u)^{v-1} f(ut) du = B_{v} t^{-v} \hat{I}^{v} f.$  (6.49)

Оскільки одержаний розв'язок (6.47) є окремим розв'язком однорідного рівняння (6.46), то його визначено з точністю до множника. Отже, величину  $A_{\nu}$  з рівняння (6.46) визначити не можна. Щоб її знайти, вираз (6.41) необхідно згорнути в інтеграл.

Зв'язок дробового інтеграла з класичною тріадною множиною Кантора було отримано на початку цього параграфа. Узагальнимо цей результат на випадок, коли множина Кантора на кожному кроці побудови складається з k смуг шириною  $k\xi < 1$ .

Обґрунтовуючи міркування аналогічно (6.35)—(6.41), отримуємо, що для k смуг лапласівський образ середнього значення, розподіленого на множині Кантора фізичної величини (6.40), буде мати множником не величину  $Q_N(z)$ , визначену (6.41), а величину  $Q_N^{(k)}(z)$ , визначену таким виразом:

$$Q_{N}^{(k)}(z) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1 - \exp\left\{-\frac{k}{k-1} z \xi^{n}\right\}}{k \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{k-1} z \xi^{n}\right\}\right]}, \quad 0 < \xi \le \frac{1}{k}, \quad z = pt(1-\xi). \quad (6.50)$$

Очевидно, що  $Q_N^{(2)}(z) = Q_N(z)$ .

Зазначимо, що вирази (6.50) і (6.41) є окремими випадками більш загального співвідношення

$$G_N(z) = \prod_{n=0}^{N-1} g(z\xi^n),$$
 (6.51)

де g(z) — довільна функція.

Дослідимо це співвідношення та покажемо, що при деяких обмеженнях на функцію g(z) воно приводить до "фрактальної залежності" (6.47), що аналогічна формулі Річардсона.

Для цього співвідношення (6.51) запишемо у вигляді суми, і враховуючи, що N >> 1, замінимо сумування інтегруванням:

$$G_N(z) = \exp\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(g(z\xi^n)\right)\right\} \approx \exp\left\{\int_0^{N-1} \ln\left(g(z\xi^n)\right) dn\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_{\varepsilon_z}^z \frac{\ln(g(y))}{y} dy\right\},$$
$$\varepsilon = \xi^{N-1} << 1, \ 0 < \xi < 1.$$

Інтегруючи за частинами, одержуємо

$$G_N(z) = \exp\left\{\frac{1}{\ln(1/\xi)}\ln(y)\ln(g(y))\right\} \underset{\varepsilon z}{z} - \frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_{\varepsilon z}^{z} \frac{g'(y)}{g(y)}\ln(y)dy\right\}.$$

Розглянемо границі z >> 1,  $\varepsilon z << 1$  і припустимо, що  $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ ,  $\lim_{z\to 0} g(z) = \overline{g} < 1$ . У цьому випадку

$$G_{N}(z) \approx z^{-\nu} \exp\left\{-\frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_{0}^{\infty} \frac{g'(y)}{g(y)} \ln(y) dy + \frac{1}{\ln(1/\xi)} \left(\int_{0}^{\varepsilon z} + \int_{z}^{\infty} \right) \frac{g'(y)}{g(y)} \ln(y) dy\right\},$$
(6.52)

де

$$\nu = \frac{\ln(l/\overline{g})}{\ln(l/\xi)}.$$
(6.53)

Нехай спостерігається такий розклад функції g(z):

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, & z << 1, \\ \overline{g} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^{-k}, & z >> 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, & z << 1, \\ \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^{-k}, & z >> 1. \end{cases}$$
(6.54)

де коефіцієнти  $a_k$  і  $A_k$  є, очевидно, функціями коефіцієнтів  $c_k$  і  $C_k$  розкладів вихідної функції g(z).

Враховуючи розклади (6.54), оцінюємо інтеграли, які входять до виразу (6.52).

Для другого інтеграла отримуємо

$$\frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_{0}^{\varepsilon_{z}} \frac{g'(y)}{g(y)} \ln(y) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k}}{\ln(1/\xi)} \int_{0}^{\varepsilon_{z}} y^{k} \ln(y) dy =$$
$$= \frac{\varepsilon_{z}}{\ln(1/\xi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k}}{k+1} (\varepsilon_{z})^{k} \ln\left[\varepsilon_{z} \exp\left\{\frac{1}{k+1}\right\}\right].$$

Цей інтеграл є малим порівняно з першим, якщо

$$\left|a_0 \varepsilon z \ln\left(\frac{\varepsilon z}{e}\right)\right| << 1 , \qquad (6.55)$$

де *е* — основа натуральних логарифмів.

Для третього інтеграла в (6.52) аналогічним чином одержуємо

$$\frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_{z}^{\infty} \frac{g'(y)}{g(y)} \ln(y) dy = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_{k}}{\ln(1/\xi)} \int_{z}^{\infty} y^{-k} \ln(y) dy =$$
$$= \frac{1}{\ln(1/\xi)} \sum_{k=2}^{\infty} A_{k} \frac{\ln\left[z \exp\left\{\frac{1}{k-1}\right\}\right]}{(k+1)z^{k-1}}.$$

Умова мализни цього інтеграла має вигляд

$$\left|A_2 \frac{\ln(ez)}{z}\right| << 1.$$
 (6.56)

Таким чином, якщо перший інтеграл в (6.52) має скінченне значення

$$\int_0^\infty \frac{g'(y)}{g(y)} \ln(y) \, dy = I \; ,$$

то в області проміжної асимптотики для змінної *z*, яка визначається співвідношеннями (6.55) і (6.56), для добутку (6.51) можна записати

 $G_N \cong A_v z^{-v}$ 

з v із виразу (6.53), що й потрібно було довести.

Для множини Кантора з k смугами (якщо вираз для функції g(z) визначається (6.50)), то розмірність v задається виразом

$$\mathbf{v}=\frac{\ln(k)}{\ln(1/\xi)}\,,$$

що відповідає фрактальній розмірності множини Кантора.

Проведені міркування дозволяють оцінити сталу  $A_v$ , яка входить до (6.48). Як зазначалось вище, вираз (6.41) є окремим випадком (6.50) при k = 2. Функція g(z) у цьому випадку визначається виразом  $g(z) = (1 + e^{-z})/2$ .

Враховуючи формулу (6.52), знаходимо

$$Q_N(z) \approx z^{-\nu} \exp\left\{-\frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_0^\infty \frac{e^{-y} \ln(y)}{1+e^{-y}} dy + \frac{1}{\ln(1/\xi)} \left(\int_0^{\varepsilon z} + \int_z^\infty \right) \frac{e^{-y} \ln(y)}{1+e^{-y}} dy\right\}.$$

Умови мализни двох останніх інтегралів в одержаному виразі мають вигляд

$$\left|z\varepsilon\ln\left(\frac{z\varepsilon}{e}\right)\right| << 1, \left|e^{-z}\ln z\right| << 1,$$

що наближено збігається з областю проміжної асимптотики (6.44). Обчислення першого інтеграла дає

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-y} \ln(y)}{1 + e^{-y}} \, dy = \int_{0}^{\infty} \ln(y) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-ny} \right] dy =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{C + \ln n}{n} = -C \ln 2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k} = -\frac{1}{2} \ln^{2} 2.$$

У цьому виразі стала  $C = -\int_{0}^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx$  — ейлерова стала. Та-

ким чином, для А, в (6.48) можна записати

$$A_{v} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\ln^{2} 2}{\ln(1/\xi)}\right\} = 2^{-\frac{v}{2}}.$$

Обчислення, проведені для регулярної множини Кантора, можна узагальнити на випадок, коли параметр  $\xi$  є випадковою величиною і на *i*-му кроці побудови має вигляд

$$\xi_i = \xi + \delta_i \,,$$

де  $\xi = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$  — середнє значення,  $\delta_i = |\xi - \xi| << \xi < 1$  — випад-

кове відхилення від середнього значення. Для ширини смуги на *n*-му кроці побудови можна записати

$$\Delta_n = t \prod_{i=1}^n \xi_i \cong \xi^n t \exp\left\{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{\delta_i}{\xi}\right)\right\}.$$

Виконуючи розклад за малою величиною  $\delta_i/\xi << 1$ , отримуємо

$$\Delta_n = \xi^n t \left[ \exp \left\{ \frac{\langle \delta \rangle}{\xi} - \frac{\langle \delta^2 \rangle}{2\xi^2} + \ldots \right\} \right]^n = \widetilde{\xi}^n t \; .$$

Tyt  $\langle \delta^i \rangle = n^{-1} \sum_{k=1}^n \delta_k^2$ .

Отже, усі попередні результати збережуться, якщо виконати таку заміну:

$$\xi \to \widetilde{\xi} = \xi \exp\left\{\frac{\langle \delta \rangle}{\xi} - \frac{\langle \delta^2 \rangle}{2\xi^2} + \ldots\right\} = \xi \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\langle \delta^k \rangle}{\xi^k}\right\}.$$
 (6.57)

Остаточно, з урахуванням (6.49), одержуємо для середнього значення фізичної величини f(t), яку розподілено на тріадній множині Кантора, такий вираз:

$$J(t) = \left\langle f(\tau) \right\rangle_t = 2^{-\frac{\nu}{2}} t^{-\nu} \hat{D}^{-\nu} f(t) (1 - \tilde{\xi})^{-\nu} = \frac{\hat{I}^{\nu} f(t)}{\left[t \sqrt{2} (1 - \tilde{\xi})\right]^{\nu}}, \qquad (6.58)$$

де "ефективний" масштабний множник  $\tilde{\xi}$  визначається співвідношенням (6.57), а  $v = D_S$  — розмірність подібності множини Кантора.

## 6.5. ПРОЦЕСИ РЕЛАКСАЦІЇ В СИСТЕМАХ ІЗ ЗАЛИШКОВОЮ ПАМ'ЯТТЮ

Розглянемо, які реальні фізичні процеси можна описати за допомогою введених у параграфі 6.1 операцій дробового інтегрування і диференціювання. Зокрема, цей формалізм можна використати для опису систем із втратами (або систем із залишковою пам'яттю), які займають проміжне положення між системами, які мають, з одного боку, повну пам'ять і марковськими системами, з другого — так, як це зроблено у [68]. Слід зазначити, що навколо зв'язку операцій дробового інтегро-диференціювання з множиною Кантора на теперішній час відбувається наукова дискусія, з якою більш детально можна ознайомитися у працях [25, 26, 82].

Вивчимо еволюцію у часі деякої фізичної системи, яка має таку властивість: значення будь-якого параметра розглянутої сис-

теми J(t) в даний момент часу пов'язане із значеннями будьякого, взагалі кажучи, іншого параметра цієї ж системи  $f(\tau < t)$  у попередні моменти часу через інтегральне перетворення з функцією пам'яті K(t) у ядрі:

$$J(t) = \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau . \qquad (6.59)$$

Зокрема, як величини f(t) та J(t) можна узагальнити силу, яка діє на систему, і потік деякої фізичної величини, викликаний цією силою.

Для систем, які не мають пам'яті, можна записати

$$K(t-\tau) = \gamma \delta(t-\tau), \qquad (6.60)$$

де  $\delta(t)$  — дельта-функція Дірака,  $\tau$  — нормувальна стала. Вираз (6.60) для функції пам'яті відповідає марковському процесу, в якому усі наступні стани системи пов'язані з попередніми через один стан у той самий момент часу. Дійсно, після підстановки (6.60) у (6.59) отримуємо

$$J(t)=\gamma f(t).$$

За наявності в системі пам'яті дельта-функція розмивається і ширина одержаної дзвоноподібної залежності визначає інтервал часу *T*, протягом якого система "пам'ятає" свій стан. При  $T \to \infty$ система буде мати ідеальну пам'ять, тобто потік *J*(*t*) буде формуватись протягом дії сили  $f(\tau < t)$ . У цьому випадку в ядрі інтегрального зв'язку (6.59) відсутня залежність від моменту часу дії сили  $f(\tau)$ , і ядро має вигляд

$$K(t-\tau) = \begin{cases} \gamma/\tau, & 0 < \tau < t, \\ 0, & \tau > t, \end{cases}$$
(6.61)

яке задовольняє умову нормування:

$$\int_0^t K(t-\tau)d\tau = \gamma \; .$$

Застосовуючи до обох частин рівності (6.59) перетворення Лапласа (6.26) і використовуючи теорему про згортку (6.28), отримуємо рівняння для лапласівських образів:

$$J(p) = K(p)f(p),$$

де  $J(p) = \hat{L}J(t), f(p) = \hat{L}f(t)$  — лапласівські образи сили та пото-

ку, а для лапласівського образу ядра інтегрального перетворення K(p) у випадку систем, які не мають пам'яті, з (6.60) одержуємо

$$K(p) = \hat{L}\gamma\delta(\tau) = \gamma \int_{0}^{\infty} \delta(\tau) e^{p\tau} d\tau = \gamma . \qquad (6.62)$$

Для систем з ідеальною пам'яттю образ ядра (6.61) для великого часового проміжку має вигляд

$$K(p) \cong \gamma/pt , \qquad (6.63)$$

тому що

$$\hat{L}J(t) = \hat{L}\left\{\frac{\gamma}{t}\int_{0}^{t}f(\tau)d\tau\right\} = \gamma \frac{1-e^{-pt}}{pt}f(p) \stackrel{|pt|>>1}{\cong} \frac{\gamma}{pt}f(p).$$

Отже, маємо два граничних випадки. "Точка" — (6.60), (6.62) — коли розглянута система втрачає пам'ять про всі свої стани за виключенням одного, зосередженого у момент часу t з нескінченно великою густиною (марковська система). "Лінія" — (6.61), (6.63) — коли система у процесі еволюції не втрачає жодного стану за весь час t дії сили (система з ідеальною пам'яттю).

Концепція фракталів оперує поняттями множин, які займають проміжне положення між точкою і лінією. Для розглянутої системи це означає наявність повної, але неідеальної (залишкової) пам'яті. У цьому випадку в процесі еволюції системи скільки завгодно довго зберігається пам'ять (у цьому розумінні пам'ять повна) тільки про частину станів системи, і ця пам'ять є не ідеальною (на відміну від ідеальної пам'яті, для якої "виживають" усі стани), а стани, які залишилися, необоротно втрачаються.

Якщо припустити, що для системи пам'ять зберігається тільки в точках множини Кантора, то вираз для лапласівського образу функції пам'яті з врахуванням (6.48) має вигляд

$$K(p)\sim[(1-\xi)pt]^{-D},$$

де *D* — фрактальна розмірність, а ξ — параметр подібності множини Кантора.

Неважко помітити, що для порожньої множини Кантора ( $\xi = 0$ , D = 0) залежність (6.64) приводить до сталої, що у відповіді з (6.62) свідчить про відсутність пам'яті в системі. Інше граничне значення ( $\xi = 1/2$ , D = 1) зводить залежність (6.64) до (6.63), що відповідає ідеальній пам'яті. Таким чином, значення фрактальної розмірності D можна розглядати як кількісну міру виявлення ефектів пам'яті.

Виконуючи обернене перетворення Лапласа (6.27) функції (6.64), одержуємо для ядра інтегральної залежності (6.59) як функції часу вираз

$$K(t-\tau) \sim \left[\sqrt{2}(1-\xi)t\right]^{-D} \frac{(t-\tau)^{D-1}}{\Gamma(D)},$$

що, із урахуванням (6.2), відповідає поданню (6.59) дробовим інтегралом:

$$J(t) = \left[\sqrt{2}(1-\xi)t\right]^{-D} \hat{I}_{0+}^{D} f(t).$$
(6.65)

Оскільки оператори дробового диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими, розглянутому вище інтегральному поданню ефектів пам'яті відповідає еквівалентний диференціальний опис. Можна показати, що для систем, які мають залишкову пам'ять, просторово-часова залежність деякої величини  $c(\vec{r},t)$ , яка зберігається (наприклад, густина зарядів, густина атомів і т. ін.), визначається таким рівнянням:

$$\frac{d^{1-D}c}{dt^{1-D}} \equiv \hat{D}^{1-D}c = B\Delta c .$$
 (6.66)

Крім того, величина *с* повинна задовольняти рівняння нерозривності:

$$\partial c/\partial t = -\nabla J, \tag{6.67}$$

де потік Ј визначається виразом (6.65).

Неважко помітити, що часова залежність для c, отримана з розв'язку рівняння (6.66), має вигляд  $c(\vec{r},t) \sim t^{1-D}$ . Крім того, часова частина потоку J у випадку сталості у часі діючої на систему сили, одержана з (6.65), визначається співвідношенням  $J(t) \sim t^{-D}$ . Отримані залежності задовольняють співвідношення нерозривності (6.67), що й свідчить про еквівалентність записів (6.65) та (6.66).

При D = 0 рівняння (6.66) аналогічне рівнянню дифузії і теплопровідності і, отже, описує необоротні явища. Дійсно, у цьому випадку рівняння неінваріантне відносно заміни  $t \rightarrow -t$ , що й є критерієм необоротності процесу у статистичній фізиці або критерієм повної втрати мікроскопічної пам'яті. Ідеальну пам'ять має, зокрема, рівняння механіки окремого об'єкта, що відбивається в інваріантності цього рівняння відносно зміни знака часу. Цей випадок реалізується в рівнянні (6.66) при D = 1.

Проміжний випадок із 0 < D < 1, який описується рівнянням у дробових похідних, характеризується тим, що при обертанні часу одна частина процесу (оборотна) зберігається, а інша частина відповідає необоротним втратам:

$$(-t)^{\alpha} = t^{\alpha} [\cos(\alpha \pi) + i \sin(\alpha \pi)], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Таким чином, можна припустити, що в системах із залишковою пам'яттю повинні бути канали пам'яті (стани системи, які зберігаються в процесі еволюції), що належать до складу деякої гіллястої фрактальної структури. Частка цих каналів визначається фрактальною розмірністю *D*, а їх структура — структурою середовища.

За допомогою рівняння у дробових похідних (6.66) можна описати процеси перенесення в перколяційних кластерах, поруватих тілах, де показник дробової похідної відповідає частці каналів, відкритих для протікання, а також процеси у фрактальних деревах, що відповідають, зокрема, ансамблям ієрархічно співпідпорядкованих потенціальних долин у спіновому і структурному склі. Ці рівняння можуть бути використані для опису динамічних процесів в аморфних матеріалах, при структурній релаксації керамік і композитів, процесів пластичної деформації та руйнування тіл і, взагалі, для опису структури твердого тіла, яке далеке від стану термодинамічної рівноваги.

Крім рівнянь типу дифузії, дробові похідні можуть виникати при описі систем із втратами, зумовленими непружним зіткненням частинок.

Запишемо рівняння руху частинки середовища у вигляді

$$m\vec{\nu}=\int_{0}^{t}F(\tau)d\tau,$$

де  $\vec{v}$  — зміна швидкості частинки за час t, m — маса частинки, F — сила взаємодії частинки із середовищем. Якщо сила взаємодії має характер зіткнення і діє тільки в моменти часу, які визначаються точками множини Кантора, то середнє значення сили буде визначатись дробовим інтегралом, і рівняння руху частинки набуде вигляду

$$\vec{v} = \frac{t}{m} A_D (1-\xi)^{-D} \hat{I}^D \vec{F} .$$

Застосовуючи до обох частин рівняння операцію дробового диференціювання і вважаючи, що взаємодія частинки з середо-

вищем носить пружний характер, тобто сила взаємодії має вигляд

$$\vec{F} = -\lambda \Omega \Delta \vec{r} ,$$

де  $\lambda$  — пружна стала,  $\Omega$  — об'єм частинки, знаходимо рівняння руху частинки:

$$\frac{d^{1+D}}{du^{1+D}}\vec{r} + V^2\Delta\vec{r} = 0.$$
 (6.68)

Тут  $u = t/\tau$  — безрозмірний час, а швидкість V визначається рівністю

$$V^{2} = t^{2} \frac{\lambda \Omega}{m} \left[ \sqrt{2} (1 - \xi) \right]^{-D}.$$
 (6.69)

Рівняння (6.68) відповідає новому типу хвильового руху, який займає проміжне положення між дифузією (D = 0) та звичайними гармонічними хвилями (D = 1). Вираз (6.69) визначає коефіцієнт дифузії і хвильову швидкість відповідно.

Рівняння (6.66), (6.68) описують просторово-часову поведінку просторово розподілених величин, про що свідчить друга похідна за координатами у цих рівняннях. У випадку локалізованої величини η рівняння узагальненої дифузії (6.66) переходить у рівняння релаксації:

$$\frac{d^{1-D}\eta}{du^{1-D}} + (\gamma_D t)\eta = 0, \qquad (6.70)$$

а рівняння (6.68) — в узагальнене рівняння гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^{1+D}\eta}{du^{1+D}} + (\omega_D t)^2 \eta = 0.$$
 (6.71)

Величини  $\gamma_D, \omega_D \sim (1 - x)^{-D}$ , які залежать від параметрів фрактальної множини, визначають час релаксації ( $\gamma_D^{-1}$ ) і частоту осцилятора ( $\omega_D$ ).

За наявності у системи ідеальної пам'яті (D = 1, оборотні процеси) рівняння (6.70) вироджується у тотожність, а рівняння (6.71) — у звичайне рівняння руху гармонічного осцилятора. У випадку повної відсутності пам'яті у системи (D = 0, повністю необоротні процеси), обидва рівняння (6.70), (6.71) зводяться до рівняння дебаївської релаксації з експоненціальним законом згасання. Випадок 0 < D < 1 займає проміжне положення, а величина фрактальної розмірності D визначає міру залишкової пам'яті системи.

Рівняння (6.70) дозволяє описати явище так званої надповільної релаксації, коли деяка величина змінюється повільніше за свою першу похідну. Визначимо частотну залежність сприйнятливості  $\chi = \partial \eta / \partial h$  системи, яка описується рівнянням (6.70), до дії зовнішнього поля *h*. Наявність зовнішнього поля спричинить появу у правій частині рівняння (6.70) змушувальної сили, і воно набере вигляду

$$\frac{d^{1-D}\eta}{du^{1-D}} + (\gamma_D t)\eta = \chi_0(\gamma_D t)h, \qquad (6.72)$$

де  $\chi_0$  — ізотермічна сприйнятливість. Рівняння у дробових похідних (6.72) після фур'є-перетворення (6.23) переходить в алгебраїчне рівняння, розв'язок якого і формує вираз для комплексної сприйнятливості системи:

$$\chi(\omega) = \frac{\chi_0}{1 + (-i\omega/\Omega_D)}, \quad \Omega_D = \frac{1}{t} \sqrt[1-p]{\gamma_D t}. \quad (6.73)$$

Вираз (6.73) збігається з емпіричною залежністю Коула-Коула, яка описує уповільнену, порівняно з дебаївською, релаксацію поляризації діелектрика, спінового та структурного скла.

# Розділ 7\_\_\_\_\_ **термодинаміка і газодинаміка**

## 7.1. ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІЗУ РОЗМІРНОСТЕЙ ДО ЗАДАЧ ТЕРМО- І ГАЗОДИНАМІКИ

#### 7.1.1. Теорія турбулентності за Колмогоровим

Одним із цікавих прикладів, де аналіз розмірностей довів свою ефективність, є теорія турбулентності за Колмогоровим.

Розглянемо турбулентність у тривимірному просторі. Великий вихор, який задається граничними умовами або утворюється зовнішньою силою, розпадається на маленькі вихори шляхом нелінійних взаємодій. Цей процес розпаду на все менші вихори, так званий енергетичний каскад, відбувається доти, поки не з'являться найменші вихори, на які вже діє в'язкість: їхня кінетична енергія обертання переходить у теплову енергію. Фактично спостерігається процес, коли кінетична енергія великомасштабного руху перетворюється у теплову на менших масштабах. Оскільки в енергетичному спектрі E(k) подана кінетична енергія різних режимів, хвильові вектори яких знаходяться у діапазоні (k, k + dk), то одним із принципових питань є k-залежність E(k)-спектра.

Для турбулентності з досить високим числом Рейнольдса не існує характерної масштабної довжини, про яку йшла мова вище. Це означає, що в середній за масштабом області, яка називається інерціальним діапазоном, енергетичний спектр може бути незалежним від граничних умов та в'язкості. Є лише одна величина, яка може діяти на енергетичний спектр, це темп дисипації є енергії. У стаціонарному стані, який реалізується завдяки неперервному постачанню кінетичної енергії, ця величина дорівнює темпу постачання енергії на одиницю маси, а також дорівнює потоку енергії крізь інерціальний діапазон.

Якщо припустити, що E(k) визначається тільки параметром є, то аналіз розмірності приводить до масштабного рівняння відносно E(k). Оскільки E(k) — це кінетичний енергетичний спектр на одиницю маси, що задовольняє рівняння

 $\frac{1}{2}V^2 = \int_0^\infty E(k)dk$ , тоді розмірність E(k) визначається як [35]:

$$\left[E(k)\right] = \left(\frac{L}{T}\right)^2 \cdot L = \frac{L^3}{T^2},$$
(7.1)

де було використано [k] = 1/L. Крім того, оскільки параметр є є темп дисипації енергії, маємо

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right] = \left(\frac{L}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{T} = \frac{L^2}{T^3}.$$

Якщо ми визначимо функціональну форму для E(k) у вигляді  $E(k) \propto k^{a} \varepsilon^{b}$ , то розмірність, набуваючи такого вигляду:

$$\frac{L^3}{T^2} = L^{-a} \cdot \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^{b} = \frac{L^{-a+2b}}{T^{3b}},$$

визначає рівняння для показників степенів: 3 = -a + 2b, 2 = 3b або a = -5/3, b = 2/3. Таким чином, отримуємо "закон Колмогорова -5/3":

$$E(k) \propto k^{-5/3} \cdot \varepsilon^{2/3}.$$

Оскільки показники степенів у цьому виразі для енергетичного спектра треба узгодити, одержуємо 2D - d = 2 - D, звідки для фрактальної розмірності: D = (2 + d)/3. Тобто, для тривимірної колмогоровської турбулентності маємо D = 5/3. Одразу зауважимо, що для d > 4 фрактальна розмірність дорівнює 2. Це регулюється тією обставиною, що для траєкторії випадкового блукання фрактальна розмірність повинна дорівнювати принаймні 2.

Аналізуючи цей приклад, ми уявно припустили, що  $\varepsilon$  — просторово однорідна величина і не фрактал. Коли область дисипації енергії утворює фрактальну структуру з розмірністю D, ми не можемо нехтувати залежністю k від  $\varepsilon$ . Давайте уявимо, що рідина розділилася на куби з довжиною ребра 1/k. Серед цих кубів  $\varepsilon$  певні "активні куби", які належать області дисипації енергії. Кількість таких кубів можна оцінити так:

$$N\left(\frac{1}{k}\right) \propto \left(\frac{1}{k}\right)^{-D} = k^{D}.$$

Таким чином, ймовірність (P(1/k)), що даний куб є активним, має вигляд

$$P\left(\frac{1}{k}\right) = k^{D-3}, \ k > 1.$$
 (7.2)

Якщо припустити, що  $\varepsilon = 0$  поза областю дисипації енергії, то величина темпу дисипації енергії в активних кубах розміром 1/k може бути записана так:

$$\varepsilon^* = \left\langle \varepsilon \right\rangle \cdot P\left(\frac{1}{k}\right)^{-1},\tag{7.3}$$

де (ε) — середній темп дисипації енергії, усереднений по всьому простору. Використовуючи (7.2) і (7.3), маємо

$$\langle \varepsilon \rangle^{2/3} = \left(\varepsilon^*\right)^{2/3} \cdot P\left(\frac{1}{k}\right)^{2/3} = \left(\varepsilon^*\right)^{2/3} \cdot k^{\frac{(D-3)2}{3}}$$

Після чого отримуємо рівняння для енергетичного спектра турбулентності за Колмогоровим, в якому останній член відпові-



РИС. 7.1. Енергетичний спектр колмогоровського тривимірного турбулентного потоку [36]

140

дає за фрактальні ефекти:

$$E(k) \propto k^{-5/3} \cdot \left\langle \varepsilon \right\rangle^{2/3} \cdot k^{\frac{(3-D)2}{3}} = \left\langle \varepsilon \right\rangle^{2/3} \cdot k^{\frac{1-2D}{3}}.$$

Результати експериментальних спостережень енергетичного спектра (у логарифмічному масштабі) подано на рис. 7.1. Пряма лінія в інерціальному діапазоні приблизно прямує за законом  $k^{5/3}$ , але точність вимірювань не є достатньою для перевірки члена, що відповідає за фрактальні ефекти.

#### 7.1.2. Теорія полімерів Флорі

Іншим прикладом аналізу розмірності є теорія полімерів Флорі. Розглянемо полімер, який складається з  $N_s$  мономерів, кожен радіусом *a*. Цей полімер вважається гнучким і гнеться довільно під дією теплових коливань. Якщо він розшириться за межі радіуса *R*, то середня густина мономера всередині цього діапазону,  $\rho_c$ , є такою:

$$\rho_c = \frac{N_s}{R^d},\tag{7.4}$$

де *d* — просторова розмірність. Оцінимо вільну енергію *F* цього ланцюга так:

$$F \propto a^d R^d \rho_c^2 + \frac{R^2}{N_z a^2}.$$
(7.5)

Перший член у цьому виразі відповідає репульсивній силі, під дією якої полімер є лінійним. Другий член відповідає за коливання, яке запобігає розширенню полімеру. Структура полімеру визначається балансом між цими двома членами. Будемо вважати, що полімер має фрактальну структуру розмірності *D*, тобто

$$N_s \propto R^D. \tag{7.6}$$

Підстановка (7.4) і (7.6) у (7.5) дає можливість оцінити репульсивну силу:

$$a^d R^d \rho_c^2 \propto R^{2D-d} \tag{7.7}$$

та коливальний член:

$$\frac{R^2}{N_s a^2} \propto R^{2-D} \,. \tag{7.8}$$

Для збалансування цих двох членів, їх показники степенів повинні бути однаковими: 2D - d = 2 - D. Це рівняння дозволяє отримати фрактальну розмірність для полімерів Флорі: D = = (2 + d)/3. У тривимірному просторі фрактальна розмірність, оцінена у такий спосіб, дорівнює 5/3. Але вона не задовольняється для великих значень d. Для великих значень d правильнішим є D = 2. Цю границю для значень d можна отримати з рівнянь (7.7) і (7.8). Оскільки вільна енергія збільшується зі збільшенням R, показник у виразах (7.7) і (7.8) повинен бути додатним, тобто  $2D - d \ge 0$  і  $2 - D \ge 0$ . Звідки випливає, що відповідні значення границі —  $D \le 2$  та  $d \le 4$ . Випадкова структура ланцюгового полімеру може бути змодельована як траєкторія оборотного блукання. Значення границь, отримані вище, вказують, що фрактальна розмірність траєкторії випадкового блукання дорівнює 2. Окремо у цьому розділі буде розглянуто процес випадкового блукання з точки зору фрактальної геометрії.

#### 7.1.3. Ударні хвилі

Ще один цікавий приклад застосування аналізу розмірностей — це визначення радіуса ударної хвилі під час атомного вибуху.

 Ідеалізоване завдання про швидкість поширення фронту ударної хвилі під час атомного вибуху можна сформулювати таким чином. Нехай в точковій області миттєво звільнюється енергія *E*. Від цієї точки поширюється ударна хвиля. Для радіуса фронту *r* цієї хвилі через час *t* можна записати наступні функціональні співвідношення  $r = r(E, t, \rho)$ , де  $\rho$  — початкова густина повітря. Кількість визначальних параметрів n = 3. Кількість параметрів з незалежними розмірностями k = 3, оскільки  $[E] = ML^2T^2$ , [t] = T,  $[\rho] = ML^{-3}$ . Очевидно, що n - k = 0 і функція (1.10) перетворюється на сталу. Таким чином,  $\Pi = \frac{r}{(Et^2/\rho)^{\frac{1}{5}}} = C$ , звідси

 $r = C(Et^2 / \rho)^{\frac{1}{5}} \sim t^{\frac{2}{5}}$ . Безрозмірна стала *C* аналізом розмірностей не може бути визначена.
#### 7.1.4. Газодинамічні задачі

Останній приклад використання аналізу розмірностей, який ми хотіли б навести у цьому розділі, це задача про швидкість v спливання бульбашки діаметром d в рідині густиною  $\rho$  і в'язкістю  $\mu$ . Нехай густина бульбашки дорівнює  $\rho_0$ . Очевидно, що до шуканих параметрів цієї задачі необхідно додати ще прискорення вільного падіння g. Таким чином, вихідна функціональна залежність має вигляд

$$v = f(a, \rho_0, \rho, \mu, g),$$

де n = 5. Кількість шуканих параметрів з незалежними розмірностями k, як було показано у параграфі 1.1, залежить від класу систем одиниць вимірювання. У класі *MLT*, для цієї задачі, k = 3. Якщо ввести ще одну основну одиницю вимірювання, наприклад силу f([f] = F), то у новому класі *FMLT* кількість шуканих параметрів становить k = 4. Завдання стає більш визначеним, оскільки в новому класі згідно з П-теоремою розв'язок буде залежати від меншої кількості розмірних параметрів (у наведеному прикладі — тільки одного) і матиме вигляд  $\Pi = \Phi(\Pi_1)$ , де  $\Pi = v/d^2 \rho g \mu^{-1}$ ,  $\Pi_1 = \rho_0/\rho$ .

Якщо розглядати задачу про спливання бульбашки повітря у рідині зі знехтувно малою густиною, то загальна кількість шуканих параметрів зменшиться, а кількість шуканих параметрів з незалежними розмірностями не зміниться. Задача стає визначеною, і її розв'язок має вигляд  $\Pi = C$ , де C — певна безрозмірна стала. Порівнюючи два останніх результати, отримуємо  $\Phi(0) = C$ , що дає можливість записати функцію  $\Phi(\Pi_1) = C (1 - \Pi_1)^{\alpha}$ , де  $\alpha$  довільна додатна стала. Таким чином, для швидкості спливання бульбашки повітря в рідині можна записати такий вираз:

$$\mathbf{v} = C \frac{d^2 g \rho}{\mu} \left( 1 - \frac{\hat{\rho}_0}{\rho} \right)^{\alpha}.$$

## 7.2. УЗАГАЛЬНЕНИЙ БРОУНІВСЬКИЙ РУХ

Розглянемо випадкове блукання частинки уздовж прямої та встановимо, які фрактальні властивості притаманні цьому процесу.

Нехай кожні τ секунд частинка перестрибує на відстань +ξ або -ξ. Для випадкового блукання густина ймовірності визначається у такий спосіб (гауссівськй розподіл):

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta\tau}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\Delta\tau}\right\}.$$

Тут  $\Delta \tau$  — коефіцієнти дифузії при ототожненні  $\xi$  з діаметром частинки та з часом зіткнень. Послідовність чисел  $\xi_i$  є набором незалежних змінних випадкових чисел. Дисперсію цього набору запишемо так:

$$\left< \xi^2 \right> = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2 \Delta \tau \Longrightarrow \Delta = \frac{\left< \xi^2 \right>}{2\tau}.$$

Оскільки послідовність є визначає довжину кроків випадкового блукання, координата частинки на осі *х* має вигляд

$$B(t=n\tau)=\sum_{i=1}^n\xi_i.$$

Графік функції *B*(*t*) (накопичене відхилення у методі Герста (параграф 4.1)) називають функцією Броуна.

Розглянемо властивості подібності одновимірних випадкових блукань. Для цього будемо реєструвати координату частинки через проміжок часу 2 $\tau$ . Тоді приріст координати  $\xi = \xi' + \xi''$ , де  $\xi'$  і  $\xi''$  незалежні прирости координати на інтервалі  $\tau$ . Ймовірність того, що перший приріст міститься на інтервалі [ $\xi', \xi' + d\xi'$ ], а другий на інтервалі [ $\xi'', \xi'' + d\xi''$ ], дорівнює  $p(\xi',\xi'',\tau) d\xi'd\xi''$ , де  $p(\xi',\xi'',\tau) = p(\xi',\tau) p(\xi'',\tau)$ , з причини статистичної незалежності приростів.

Враховуючи це, для густини ймовірності при спостереженні кожного другого кроку випадкового одновимірного блукання знаходимо

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi - \xi', \tau) p(\xi', \tau) d\xi' = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta 2\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\Delta 2\tau}\right)$$

У випадку половинного часу реєстрування, як і до того, має місце гауссівський розподіл, однак дисперсія подвоїлась. Це твердження легко узагальнити на довільний час реєстрування. Отже, броунівські функції не змінюють свого вигляду зі зміною масштабу часу, тобто є масштабно інваріантними. Для густини ймовірності одновимірного випадкового блукання запишемо співвідношення подібності:

$$p\left(\widehat{\xi}=b^{\frac{1}{2}}\xi,\,\widehat{\tau}=b\tau\right)=b^{-\frac{1}{2}}p(\xi,\,\tau).$$

Оскільки уздовж різних координат масштаб перетворення неоднаковий, таке перетворення, як вже обговорювалося у параграфі 1.2, є афінним, а залежність (7.9) — самоафінною.

Для розподілу координати броунівської частинки можна записати вираз

$$p(B(t) - B(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta|t - t_0|}} \exp\left\{-\frac{[B(t) - B(t_0)]^2}{4\Delta|t - t_0|}\right\},$$

який задовольняє співвідношення подібності

$$p\left(b^{\frac{1}{2}}[B(bt) - B(bt_0)]\right) = b^{-\frac{1}{2}}p(B(t) - B(t_0)).$$

Середнє значення координати броунівської частинки і її дисперсія визначаються виразами:

$$\langle B(t) - B(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta B p(\Delta B, t - t_0) d\Delta B = 0$$

$$\left\langle (B(t) - B(t_0))^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta B^2 p(\Delta B, t - t_0) d\Delta B = 2\Delta |t - t_0|.$$

Таким чином,  $B(t) - B(t_0) \sim |t - t_0|^{1/2}$ .

Мандельброт увів поняття узагальненого броунівського руху, замінивши коефіцієнт 1/2 на 0 < H < 1 і позначивши таку функцію як  $B_{\rm H}(t)$ . У цих позначеннях броунівський рух з незалежними приростами описується функцією  $B(t) = B_{1/2}(t)$ .

Для узагальненого броунівського руху:

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0$$
,  $\langle (B_H(t) - B_H(t_0))^2 \rangle = 2\Delta \tau \left( \frac{|t - t_0|}{\tau} \right)^{2H}$ 

а співвідношення подібності має вигляд

$$p(b^{H}[B_{H}(bt) - B_{H}(bt_{0})]) = b^{-H} p(B_{H}(t) - B_{H}(t_{0})).$$

Зазначимо, що узагальнений броунівський рух має нескінченно великий час кореляції.

Нехай у момент часу  $t_0 = 0$  функція  $B_H(t_0) = 0$ . Вибираючи одиниці вимірювання так, щоб  $\tau = 1$ ,  $2\Delta \tau = 1$ , для функції кореляції майбутніх приростів  $B_H(t)$  з минулими  $B_H(-t)$  можна записати

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(-t)B_H(t)\rangle}{\langle B_H^2(t)\rangle} = 2^{2H-1} - 1.$$

При H = 1/2 C(t) = 0 для будь-яких значень *t*, що вказує на відсутність кореляції для випадкового блукання. При H > 1/2C(t) > 0 незалежно від *t*. Кажуть, що системі з H > 1/2 притаманна персистентність (зберігання тенденції), тобто, якщо протягом деякого часу в минулому відбувалося збільшення, то протягом цього часу і в майбутньому в середньому теж буде відбуватися збільшення. Використовуючи метод Герста для узагальненого броунівського руху, можна показати, що

$$R(\tau) \sim \tau H$$
,  $S(\tau) \sim 1$ ,  $R/S \sim \tau H$ .

Отже, узагальненим броунівським рухом можна моделювати часові ряди, які мають персистентність.

Обмежена множина є самоафінною щодо вектора подібності  $\vec{r} = (r_1, ..., r_E)$ , якщо E є об'єднанням N підмножин  $E_1, ..., E_N$ , що перетинаються, кожна з яких конгруентна множині  $\vec{r}(E)$ , отриманій з E за допомогою афінного перетворення  $(x_1, ..., x_E) \rightarrow (x_1r_1, ..., x_Er_E)$ . Властивість конгруентності означає, що множина точок  $E_i$  збігається з множиною точок  $\vec{r}(E)$  після перенесення і (або) повороту. Множина E статистично самоафінна, якщо  $E_i$  і  $\vec{r}(E)$  не конгруентні, а мають однакові статистичні властивості.

### 7.3. ДРОБОВЕ ОБЧИСЛЕННЯ І БРОУНІВСЬКИЙ РУХ

Для синусної хвилі  $\exp(ikx)$  застосування *n* разів оператора диференціювання  $d/dx \in$ тим самим, що і множення на величину  $(ik)^n$ :

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ikn} = (ik)^n \cdot e^{ikx} \,. \tag{7.10}$$

Якщо n — натуральне число, то ця рівність стає тривіальною. Для від'ємних значень n рівняння (7.10) справедливе, якщо визначити n-й порядок похідної n-м порядком інтеграла (нехтуючи при цьому членами, які виникають за рахунок сталих інтегрування). Для нецілого значення n рівняння (7.10) можна розглядати як означення диференціювання або інтегрування нецілого порядку (див. розділ 6). У такий спосіб можна розглянути диференціювання або інтегрування нецілого порядку для синусної хвилі.

Оскільки будь-яка функція може бути розкладена у ряд синусних функцій і операції диференціювання та інтегрування є

лінійними, то можна визначити *n*-й порядок похідної даної функції f(x) через перетворення Фур'є таким чином:

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (ik)^n \hat{f}(k) \cdot e^{ikx} dk .$$
(7.11)

Випадок n = 0 відповідає звичайному перетворенню Фур'є. Функція під інтегралом обчислюється за оберненим перетворенням Фур'є. Для цілого n ця формула добре узгоджується зі звичайним диференціюванням або інтегруванням.

Розглянемо функцію f(x), спектр S(k) якої можна виразити як певний степінь k:

$$S(k) = \left|\hat{f}(k)\right|^2 \propto k^{-\alpha}$$
.

Як вже згадувалося, цей показник  $\alpha$  і фрактальна розмірність *D* задовольняє наступне співвідношення:

$$\alpha=5-2D,$$

для  $1 < \alpha < 3$ . Спектр похідної *n*-го порядку S(k) з (7.11) має вигляд

$$S(k) \propto k^{-\alpha + 2n} \,. \tag{7.12}$$

Використовуючи ці рівняння, отримуємо таку фрактальну розмірність графа  $f^{(n)}(x)$ :

$$D^{(n)} = D + n.$$

Це відношення справедливе для нецілого значення n, коли воно знаходиться у діапазоні 1...2. Цікаво, що фрактальна розмірність графа може змінюватися неперервно при зміні порядку інтегрування. Для будь-якого додатного n отримуємо  $D^{(n)} > D$ , що означає, що диференціювання збільшує фрактальну розмірність графа, або, що те ж саме, граф стає все менш плавним, ніж початковий. Навпаки, для від'ємних n ми маємо  $D^{(n)} < D$ , і інтегрування робить граф більш плавним.

Означення (7.11) не є точним, оскільки має математичні проблеми, зокрема конвергенцію. Строге математичне означення диференціювання або інтегрування нецілого порядку обговорено у розділі 6.

Звичайний броунівський рух B(x) отримується інтегруванням білого шуму. Спектр білого шуму містить у собі весь набір частот і він пропорційний  $k^{0}$ , а значить, спектр броунівського руху про-

порційний  $k^{-2}$ . Їз рівняння (7.12) фрактальна розмірність графа B(x) дорівнює 1.5. Інтегруванням броунівського руху дробовим числом разів ми можемо утворити новий випадковий рух  $B_H(x)$ , (0 < H < 1):

$$B_H(x) = I^{H-1/2}(B(x)) = \frac{1}{\Gamma(H=1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^{H-1/2} dB(x) \, .$$

Цей інтеграл, загалом, розходиться. Однак різниця ( $B_H(x + X) - B_H(x)$ ) є скінченною, а отже, важливою. Випадок H = 1/2 відповідає початковому броунівському руху. Для H > 1/2 функція  $B_H(x)$  визначає стохастичний процес, який менш швидкий, ніж броунівський рух. H зв'язана з фрактальною розмірністю D таким співвідношенням:

$$D=2-H.$$

Таким чином, функція  $B_H(x)$  має самоподібність у тому сенсі, що різниця:

$$B_{H}(x+X) - B_{H}(x) \stackrel{d}{=} h^{-H} \{ B_{H}(x+hX) - B_{H}(x) \},\$$

де h — довільна позитивна величина. Таким чином, різниця між двома віддаленими положеннями має такий же розподіл, як і різниця між двома близькими положеннями. Цікавий рисунок випадкового рельєфу, подібного до поверхні Землі, наведено у книжці Мандельброта [64]. Побудовано його саме на основі цього дробового броунівського руху  $B_H(x)$ , узагальненого до (2 + 1)-вимірного простору. Коли x — двовимірний вектор, граф  $B_H(x)$  має форму, яка нагадує рельєф Землі, при цьому величина H вибирається наближено. Цей метод досить ефективний у застосуванні до комп'ютерної графіки.

## 7.4. ДОВГОЧАСНІ ХВОСТИ І МОДЕЛЬ ГАЗУ ЛОРЕНЦА

Безліч природних явищ мають довгочасні кореляції, які описуються степеневими законами. Розглянемо декілька прикладів залежностей з довгочасними хвостами, які викликаються випадковими блуканнями.

Одним із таких прикладів системи, де, взаємодіючи, розсіюються багато частинок, є модель газу. У такій системі блукання кожної частинки є майже випадковими. Не зважаючи на те, що автокореляція швидкості такої частинки спадає експоненціаль-

но, Олдер і Вайнврайт, використовуючи цифрове моделювання, змогли довести, що вона має довгочасний хвіст. Це відкриття привело до численних досліджень довгочасних хвостів, а також до формулювання кореляційної функції:

$$\langle \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(t)\rangle \propto t^{-d/2}, \ d \ge 2, \tag{7.13}$$

де d — просторова розмірність. Це співвідношення випливає з ефекту в'язкості, оскільки зовнішня дія спадає через в'язкість за таким же степеневим законом (7.13).

Наявність довгочасних хвостів вказує, що частинки в газі "не забувають" своєї історії: їх блукання можна описати за броунівським рухом Марковяна. Використаємо рівняння Фоккера—Планка або його узагальнену версію для опису руху дифузних частинок:

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial^j}{\partial x^j}S(x,t),$$

де S(x, t) — густина ймовірності, при якій частинка знаходиться у положенні x у часі t. Однак це рівняння не задовольняє випадкові блукання, що мають довгочасні хвости, оскільки коефіцієнти дифузії  $a_2$  і більш високого порядку  $a_3$ ,  $a_4$ , ... повинні розбігатися для такого випадкового процесу.

Довгочасні хвости випадкових блукань притаманні більш простій системі — моделі газу Лоренца, де класична частинка пружно розсіюється від випадково розміщених фіксованих розсіювачів. Свого часу ця модель була запропонована як модель руху електронів у металі. У випадку, коли розсіювачі мають вигляд гратки, очевидно, що автокореляційна швидкість частинок зменшується швидше, оскільки не має довгочасного хвоста. Навпаки, якщо розсіювачі розподілені довільно, то існує довгочасний хвіст у *d*-вимірному просторі:

$$\left\langle v(0)v(t)\right\rangle \propto -t^{-(d/2+1)}. \tag{7.14}$$

Якщо порівняти це рівняння з (7.13), то можна побачити, що існують дві розбіжності: степеневий показник і знак хвоста. У моделі газу Лоренца кореляція зменшується швидко, переходячи через нуль за дуже швидкий час, потім релаксує і поступово набуває форму степеневого закону. Цікавою властивістю довгочасних хвостів є залежність показника степеня від просторової розмірності *d*. Тобто виникає питання: чи можна поширити цю величину розмірності на нецілі величини. Розглянемо для цього такий приклад стохастичної версії моделі газу Лоренца в одновимірному просторі. Ця модель містить у собі частинку, що рухається зі швидкістю  $\pm c$  уздовж *x*-осі, і в кожній точці ґратки  $x = i\Delta$  (*i* — ціле) знаходиться точкоподібний розсіювач.

Частинку, яка локалізована на інтервалі  $((i - 1) \Delta, i\Delta]$  при t = n/c зі швидкістю (+c), можна знайти або на суміжному інтервалі  $(i\Delta, (i + 1) \Delta]$  зі швидкістю (+c), або на інтервалі  $((i - 1) \Delta, i\Delta]$  із протилежною швидкістю (-c) при  $t = (n + 1) \Delta/c$ . Відповідні ймовірності появи частинки дорівнюють  $(1 - \exp(-\alpha_i))$  та  $(\exp(-\alpha_i))$ . Таким чином, частинка пружно відбивається з ймовірністю  $(1 - \exp(-\alpha_i))$  від розсіювача у положенні  $x = i\Delta$ . Додатна величина  $(\alpha_i)$  визначає міцність розсіювача у точці  $x = i\Delta$ . Для цієї системи можна записати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} S_i^+(n+1) = e^{-\alpha_i} \cdot S_{i-1}^+(n) + (1 - e^{-\alpha_i}) \cdot S_i^-(n), \\ S_i^-(n+1) = (1 - e^{-\alpha_{i+1}}) \cdot S_i^+(n) + e^{-\alpha_{i+1}} \cdot S_{i+1}^-(n), \end{cases}$$
(7.15)

де  $S_i^+(n)$  і  $S_i^-(n)$  — густини ймовірностей того, що частинка локалізована на інтервалі ( $i\Delta$ , (i + 1) $\Delta$ ] при  $t = n \Delta/c$  зі швидкістю (+c) і (-c) відповідно.

Автокореляційна швидкість має вигляд

$$\left\langle \gamma \left( \frac{n\Delta}{c} \right) \right\rangle \cdot \gamma(0) = c^2 \frac{\sum (S_i^+(n)_i - S_i^-(n))}{\sum (S_i^+(0)_i - S_i^-(0))}.$$

Початкова умова для (7.15) є  $S_i^+(0) = -S_i^-(0) = \text{const.}$  За цієї умови середнє вибирається через початкове положення і напрямок руху частинки. Від'ємна величина ймовірності *S* не має фізичного змісту і є лише математичним трюком.

У випадку, якщо розподіл розсіювачів є фракталом з розмірністю D, то  $\{a_i\}$  задовольняє таке співвідношення:

$$\overline{(a_j - a) (a_i - a)} \propto \begin{cases} |i - j|^{D-1}, & 0 < D < 1, \\ \delta_{ij}, & D = 0, \end{cases}$$

де пряма лінія означає середнє за ансамблем і a — середнє за  $a_i$  (незалежно від i). Задовольняючи це співвідношення, кожна величина  $a_i$  визначається довільно.

Визначаючи показники степеня для різних значень *D*, можна поширити (7.14) у той самий спосіб, який випливає із випадку,

коли просторова розмірність дорівнює 1, а домішки мають фрактальну розмірність D:

$$\langle \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(t)\rangle \propto -t^{-\left\{\frac{1-D}{2}+1\right\}}, \ 0 \leq D \leq 1.$$

Цей результат було підтверджено як числовим моделюванням, так і теоретично. Зазначимо, що розподіл білого шуму домішок D = 0, тобто у цьому випадку можна застосовувати (7.14).

Отже, довгочасний хвіст моделі газу Лоренца в одновимірному просторі має фрактальну природу. У *d*-вимірному просторі можна очікувати появу такого довгочасного хвоста:

$$\langle \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(t)\rangle \propto -t^{-\left\{\frac{d-D}{2}+1\right\}},$$

де *D* — фрактальна розмірність розсіювачів, а величина (*d* – *D*) називається сумірністю.

## **ЕЛЕКТРОДИНАМІКА**

### 8.1. ВІДГУК ШОРСТКУВАТИХ ПОВЕРХОНЬ

Розглянемо електричні властивості поверхні контакту електроліту і металевого електрода. У класичній теорії вплив межі на проходження через дану систему електричного струму описується межевою ємністю системи електроліт—електрод, замкненої послідовно з активним опором електроліту. Для імпедансу такої класичної системи можна записати:

$$Z(\omega) = R + 1 / (i\omega C) \, .$$

Дійсна частина імпедансу — величина стала, а уявна — обернено пропорційна частоті.

Однак реальні системи електроліт—електрод поводяться не так, як це описано вище. У більшості таких систем у деякому діапазоні частот  $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$  у частотній залежності імпедансу домінує доданок ( $i\omega$ )<sup>-η</sup>, де показник  $0 < \eta < 1$ . Цей додатковий член називається елементом сталої фази (ЕСФ).

Розглянемо модель, яка пояснює наявність ЕСФ, у межах якої він пов'язується із фрактальною геометрією поверхні поділу електроліт—електрод. Як уже зазначалось вище, поверхні твердих тіл на мікроскопічному масштабі є шорсткуватими. Така шорсткуватість поверхні може бути описана за допомогою фрактальної розмірності D, для якої виконується нерівність 2 < D < 3. Значення D = 2 відповідає абсолютно гладким поверхням. Фрактальний характер реальних поверхонь твердих тіл можна підтвердити, розглядаючи їх під мікроскопом. У фрактальних об'єктах відсутній природний масштаб довжини, і при різних збільшеннях вони виглядають однаково.

Розглянемо модель поверхні електрода, яка ґрунтується на канторівській множині. При побудові такої моделі будемо вважати, що число блоків, які беруть участь у побудові, N = 2, а масштабний множник  $r = 1/\xi$ ,  $\xi > 2$ . Враховуючи це, у вибраній моделі межа поділу електрода з електролітом має вигляд самоподібних подряпин. Переріз цієї межі площиною зображено на рис. 8.1.



РИС. 8.1. Вигляд межі поділу електрода з електролітом у моделі канторівської множини (електрод зображено більш темним)

Тому що одержана межа у напрямі, перпендикулярному до площини рисунка, трансляційно інваріантна, то очевидно, що її фрактальна розмірність  $D = 2 + D_s$ , де  $D_s = \log_{\xi} 2$  — фрактальна розмірність вихідної канторівської множини.

Кожна ділянка розглянутої поверхні є електричним колом протікання змінного струму. Еквівалентну електричну схему такої системи наведено на рис. 8.2.

Як видно з рис. 8.2, дана схема має яскраво виражену ієрархічну структуру, що відповідає припущенню про фрактальний характер поверхні електрода. Кожна нова стадія побудови канторівської множини відповідає розгалуженню кола. Опір кожної нової гілки збільшується у  $\xi$  разів, оскільки переріз відповідного виступу зменшується у  $\xi$  разів. Кількість конденсаторів на кожній послідовній стадії теж збільшується. Ємності усіх конденсаторів, що відповідають поверхневій ємності виступів, однакові. Це виникає через нехтування поверхневою ємністю, яка пов'язана з дном западин. Дійсно, на далеких стадіях побудови площа поверхні цих западин стає дуже маленькою (довжина канторівської множини прямує до нуля) і в асимптотичній межі її внесок несуттєвий.

Вхідний імпеданс кола, зображеного на рис. 8.2, можна записати у вигляді ланцюгового дробу:

$$Z(\omega) = R + \frac{1}{i\omega C + \frac{2}{\xi R + \frac{1}{i\omega C + \frac{2}{\xi^2 R + \omega}}}}$$

ЧАСТИНА 2. Застосування фракталів у математиці, фізиці і астрофізиці



РИС. 8.2. Еквівалентна схема межі поділу електрод-електроліт

Установимо масштабне (скейлінгове) співвідношення для Ζ(ω):

$$Z\left(\frac{\omega}{\xi}\right) = R + \frac{1}{i\frac{\omega}{\xi}C + \frac{2}{\xi R + \frac{1}{i\frac{\omega}{\xi}C + \frac{2}{\xi^2 R + \dots}}}} = R + \frac{\xi Z(\omega)}{i\omega CZ(\omega) + 2}.$$

154

На низькочастотній границі  $\omega << 1/RC$  скейлінгове співвідношення має вигляд

$$Z\left(\frac{\omega}{\xi}\right) \approx \frac{\xi}{2} Z(\omega)$$

Це співвідношення задовольняється при

$$Z(\omega) \sim (i\omega)^{-\eta}, \qquad (8.1)$$

з  $\eta = 1 - \log_{\xi} 2 = 3 - D$ , де D визначена вище фрактальна розмірність поверхні електрода.

Для аналізу поведінки системи, пов'язаної з ЕСФ, розглянемо коло, зображене на рис. 8.2 на кінцевій стадії побудови. Поведінку дійсної частини імпедансу кола залежно від частоти при різній кількості рівнів ієрархії зображено на рис. 8.3.

На високих частотах граничне значення імпедансу дорівнює *R*. На низьких частотах ця величина виходить на плато, величина якого для кожної наступної ієрархії збільшується у  $\xi$  разів. Між цими двома межами система має ЕСФ. Діапазон частот, у межах якого спостерігається сталість кута втрат, відповідає діапазону просторових масштабів (проміжної асимптотики), у межах яких поверхня електрода є самоподібною, тобто має фрактальні властивості.

З фізичної точки зору, степенева залежність імпедансу від частоти пов'язана з конкуренцією резистивного та ємнісного шляхів протікання струму. Сигнал більш низької частоти поширюється далі уздовж кола, перш ніж він зможе пройти крізь поверхневу ємність. Через це імпеданс на більш низьких частотах більший, ніж на високих.

Як вже зазначалось вище, реальні системи не мають чіткої регулярності, притаманної канторівській множині. Поверхні реальних твердих тіл подібні лише в статистичному сенсі, тобто статистичні властивості цих поверхонь інваріантні відносно скейлінгових перетворень. Для того щоб відобразити цю особливість реальних поверхонь, змінимо процедуру побудови моделі поверхні електрода з використанням канторівської множини. Нехай масштабний множник і число гіллястості змінюються від однієї стадії побудови до другої і на *i*-му кроці дорівнюють  $N_i$  і  $\xi_i$  відповідно. У цьому випадку вираз для вхідного імпедансу має вигляд



РИС. 8.3. Графік імпедансу системи електроліт—електрод на скінченному кроці побудови множини Кантора

$$Z(\omega) = R + \frac{1}{i\omega C + \frac{N_1}{\xi_1 R + \frac{1}{i\omega C + \frac{N_2}{\xi_1 \xi_2 R + \dots}}}}$$

Низькочастотне скейлінгове співвідношення у цьому випадку задається виразом

$$Z(\omega) \approx \frac{\xi_1}{N_1} Z_1(\xi_1 \omega), \qquad (8.2)$$

де Z<sub>i</sub>(ω) — імпеданс кожної з гілок системи, що відповідають першій стадії побудови.

Нехай множини  $\{N\}$ ,  $\{\xi\}$  — випадкові числа із заданими розподілами. Виконаємо усереднення (8.2) за ансамблем систем:

$$\langle Z(\omega) \rangle \approx \frac{\langle \xi Z_1(\xi \omega) \rangle}{\langle N \rangle}.$$
 (8.3)

Оскільки припускалась статистична самоподібність досліджуваної системи, то величини  $Z(\omega)$  та  $Z_1(\omega)$  повинні мати однакову частотну залежність, яка визначається виразом (8.1). Підставляючи (8.1) у (8.3), знаходимо  $\langle N \rangle \langle \xi^{\eta-1} \rangle = 1$ .

Для того щоб мати нетривіальний розв'язок для  $\eta$ , необхідно поставити вимогу  $\langle 1/\xi \rangle < 1/\langle N \rangle < 1$ . Таке обмеження на множини  $\{N\}$  і  $\{\xi\}$  є умовою того, що досліджувана статистична поверхня електрода є дійсно фрактальною. Фрактальна розмірність *D* такої поверхні задається співвідношенням  $\langle N \rangle \langle \xi | D^{-D} \rangle = 1$ . Таким чином, як і раніше,  $\eta = 3 - D$ . Цікаво зазначити, що

Таким чином, як і раніше,  $\eta = 3 - D$ . Цікаво зазначити, що показник  $\eta$  залежить тільки від середнього числа розгалужень і не залежить від вигляду розподілу масштабного множника  $\xi$ .

Подальші узагальнення даної моделі, наприклад, коли множина випадкових коефіцієнтів {ξ} різна для різних гілок на одній стадії побудови, приводять до аналогічних результатів.

#### 8.2. СКІН-ЕФЕКТ ФРАКТАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Як було показано вище, фрактальність (в геометричному сенсі) досліджуваних об'єктів істотно впливає на фізичні явища, які відбуваються в них. У зв'язку з цим виникає можливість вимірювання фрактальних розмірностей реальних матеріалів не шляхом прямого застосування математичних визначень (що є дуже трудомістким процесом), а проведенням фізичного експерименту.

Зокрема, задача визначення фрактальної розмірності поверхні шорсткуватих провідників може бути суттєво спрощена, якщо використати звичайний скін-ефект.

Розглянемо провідник, який має циліндричну форму. Прикладемо уздовж циліндра змінні електричні поля з амплітудою Eі частотою  $\omega$ . Відповідна глибина скін-шару визначається виразом  $\delta \sim \omega^{-1/2}$ , де коефіцієнт пропорційності залежить від електромагнітних властивостей однорідної речовини. Визначимо енергію, яка розсіюється речовиною, у такий спосіб:

$$P = \int \vec{j}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} , \ \vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) ,$$

де  $\sigma$  — електропровідність,  $\vec{j}$  — густина електричного струму,  $\vec{E}$  — електричне поле. Враховуючи це, знаходимо

$$P = \sigma \int E^2 d^3 r = \sigma \langle E^2 \rangle_V \int d^3 r = \sigma \langle E^2 \rangle SV.$$

Усереднення виконується за об'ємом  $V = S\delta$  шару  $\delta$  речовини площею *S*, в якому електричне поле суттєво відрізняється від нуля.

Нехай поверхня досліджуваного провідника має фрактальний характер. У цьому випадку можна ввести фрактальні розмірності бокової поверхні, периметра та твірної:

$$D(L) = \frac{\ln(L/\delta)}{\ln(1/\delta)} \Rightarrow L \sim \delta^{1-D(L)}, \quad 1 \le D(L) < 2,$$
  

$$D(T) = \frac{\ln(T/\delta)}{\ln(1/\delta)} \Rightarrow T \sim \delta^{1-D(T)}, \quad 1 \le D(T) < 2,$$
  

$$D(S) = \frac{\ln(S/\delta)}{\ln(1/\delta)} \Rightarrow S \sim \delta^{2-D(S)}, \quad 2 \le D(S) < 3,$$

де L — довжина твірної, T — периметр основи, S — площа бокової поверхні. Природно довжиною, яка слугує для вимірювання довжин і площ в даній задачі, є товщина скін-шару  $\delta$ .

Будемо проводити експеримент з фіксованою густиною енергії електромагнітного поля. У цьому випадку  $\langle E^2 \rangle$  = const, і для розсіяної потужності знаходимо

 $P \sim S \delta \sim \delta^{2-D(S)} \delta \sim \delta^{3-D(S)} \sim \omega^{\frac{D(S)-3}{2}}.$ 

При D(S) = 2 (гладка поверхня) маємо стандартне співвідношення  $P \sim \omega^{-1/2}$ .

Виконаємо експеримент з проходженням змінного струму. Прикладемо до кінців провідника різницю потенціалів *U*. У цьому випадку

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{U^2}{L^2} \Rightarrow P \sim \frac{\delta\delta}{L^2} U^2.$$

Однак  $P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R \sim \frac{L^2}{S\delta}$ . Враховуючи фрактальні властивості

досліджуваного зразка, маємо:

$$R \sim \delta^{D(S)-2D(L)-1} \sim \omega^{\frac{1+2D(L)-D(S)}{2}}$$

При D(L) = 1 і D(S) = 2 (гладка бокова поверхня циліндра) маємо стандартне співвідношення  $R \sim \sqrt{\omega}$ .

Таким чином, наносячи експериментальні дані на графіки у подвійному логарифмічному масштабі  $(\ln P, \ln \omega)$  та  $(\ln R, \ln \omega)$ , отримуємо прямі з кутовими коефіцієнтами (D(S) - 3)/2 та (1 + 2D(L) - D(S))/2, що дозволяє безпосередньо знаходити D(S) та D(L).

Очевидно, що реальні речовини (навіть фрактальні) не будуть виявляти аномального скін-ефекту на всіх частотах. У реальних експериментах спостерігатимуться різноманітні фрактальні або евклідові режими. Завжди буде спостерігатися низькочастотний режим, коли глибина скін-шару  $\delta$  настільки велика, що не дає змогу відстежити шорсткуватість поверхні і високочастотний режим, коли масштаб  $\delta$  настільки малий, що дозволяє відстежити шорсткуватість поверхні в усіх дрібницях. Аномальна поведінка  $P(\omega)$  і  $R(\omega)$  буде спостерігатись тільки в області проміжної асимптотики  $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$ .

## 8.3. ВИНИКНЕННЯ БІСОВИХ СХОДІВ У СПІНОВИХ СИСТЕМАХ

Методами згортання і розгортання можна описати стан реально існуючих фізичних систем. Наприклад, розглянемо спінову модель однаково заряджених частинок з короткодіючою (репульсивною) взаємодією, у якій співвідношення між зовнішнім полем і чутливістю системи породжує бісові сходи (параграф 2.8).

Нагадаємо, спін — це фізичний термін, що означає власний момент кількості руху квантової частинки. Це аксиальний вектор (як напрям осі гіроскопу). За законами квантової механіки проекція спіну на вісь квантування може приймати дискретні значення, що відповідають різним орієнтаціям осі обертання частинки відносно осі квантування. Зокрема, для електрона спін дорівнює 1/2, і його проекція набуває значення +1/2 і –1/2. Ці проекції часто називають проекцією уздовж осі і проти осі. У даній задачі зручно вибрати вісь квантування як вертикально напрямлену і паралельну зовнішньому магнітному полю. Тоді стани частинки з проекціями на таку вісь (у випадку вибраної нами спінової системи +1/2 і –1/2) називають станом зі спіном вгору і станом зі спіном донизу відповідно.

Розглянемо випадок модельної спінової системи на одновимірній гратці, де кожен спін  $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$  ( $\sigma_i = \pm 1$ ) набуває значення  $\pm 1/2$ , гамільтоніан такої системи можна записати так:

$$\aleph = \sum_{i=1}^{N} H \cdot \sigma_{i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} J(i-j)(\sigma_{i}+1)(\sigma_{j}+1), \qquad (8.4)$$

де H — величина, пропорційна зовнішньому магнітному полю (далі — просто "магнітне поле"), а ядро взаємодії J(i - j) задовольняє такі співвідношення:

1)  $J(i) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ ;

2) для всіх *i*,  $J(i+1) - 2J(i) + J(i-1) \ge 0$ ;

3) J(i) > 0 (антиферомагнетик).

Друга умова означає, що взаємодія є увігнутою функцією відстані. Зазначимо, що в такій системі розглядається взаємодія тільки між частинками зі спінами, орієнтованими вгору, оскільки частинки зі спінами, орієнтованими донизу, не дають внеску у другий член (8.4).

Якщо частина спінів, орієнтованих угору, дорівнює q, то основний стан і стан найменшої енергії можна отримати у такий спосіб. У випадку q = 1/n, коли n — натуральне число, між будьякими двома послідовними спінами, орієнтованими вгору, існує (n - 1) спінів, орієнтованих донизу. Іншими словами, спіни, орієнтовані вгору, локалізовані на кожному n-му спіні. В узагальненому випадку q = m/n (n і m є нескороченими цілими) основний стан має періодичну спінову конфігурацію з періодом n і містить у собі *m* спінів, орієнтованих вгору, у кожному періоді. Це означає, що відстані між двома сусідніми спінами, орієнтованими вгору, дорівнюють або [n/m], або [n/m] + 1 (де квадратні дужки показують найбільше ціле [x], яке не первищує *x*). Наприклад, коли q = 1/3, 2/5, 3/7, спінові конфігурації є такими:

$$1/3; \dots \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \dots$$
  

$$2/5; \dots \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \dots$$
  

$$3/7; \dots \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \dots,$$
  
(8.5)

де векторами позначено спіни, орієнтовані вгору і донизу відповідно.

Для даного раціонального числа q можна довести, що основний стан отримується в ході описаної нижче процедури. Поперше, визначимо цілі k,  $n_0$ ,  $n_1$ , ...,  $n_k$  такими рівняннями:

$$\frac{1}{q} = n_{0} + r_{0}, 
|1/r_{0}| = n_{1} + r_{1}, 
\vdots (8.6) 
|1/r_{k-2}| = n_{k-1} + r_{k-1}, 
|1/r_{k-1}| = n_{k},$$

для всіх j,  $-1/2 < rj \le 1/2$  (послідовність повинна бути обмежена для раціонального q). По-друге, визначимо послідовності  $X_1$ ,  $X_2$ , ...,  $X_k$  та  $Y_1$ ,  $Y_2$ , ...,  $Y_k$  у такий спосіб:

$$X_{1} = n_{0}, Y_{1} = n_{0} + \alpha_{0}, X_{i+1} = (X_{i})^{n_{i}-1}Y, Y_{i+1} = (X_{i})^{n_{i}+\alpha_{i}-1}Y_{i}, (8.7)$$
  
$$\alpha = r/|r| = +1$$

де  $\alpha = r_i / |r_i| = \pm 1.$ Тобто *Y* визнач

Тобто,  $X_{k+1}$  визначає спінову конфігурацію найменшої енергії. Наприклад, розглянемо випадок q = 11/47. З рівнянь (8.6) отримуємо  $n_0 = 4$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 3$  і  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = -1$ . З рівнянь (8.7) отримуємо  $X_1 = 4$ ,  $X_2 = 4^3$ ,  $X_3 = (4^3 5)^2 4^2 5$ , та  $Y_1 = 5$ ,  $Y_2 = 4^2 5$ . Верхній індекс вказує число повторів, а  $X_3$  можна записати так:

У цьому виразі для послідовності  $X_3$  число 4 (або 5) показує, що четвертий (або п'ятий) спін, який рахується від спіну, орієнтованого вгору, є спіном, орієнтованим донизу. Сума чисел у послідовності  $X_3$  дорівнює 47, а це означає, що період спінової конфігурації дорівнює 47. Оскільки  $X_3$  складається з 11 фігур, то існує 11 спінів, орієнтованих вгору, у періоді. Наведену вище вибірку (8.5) можна записати у такій формі:

$$\frac{1}{3} \rightarrow 3$$
,  $\frac{2}{5} \rightarrow 3 \cdot 2$ ,  $\frac{3}{7} \rightarrow 2^2 \cdot 3$ .

Оскільки спінова конфігурація в основному стані є вже відомою, то можна дослідити, як відношення спінів, орієнтованих вгору, буде змінюватися при зміні зовнішнього поля. З цією метою розглянемо зміну загальної енергії, коли один спін, орієнтований вгору, в основному стані з q = m/n "перевертається" у спін, орієнтований донизу. У цьому випадку

$$\Delta U = 2H + 4(r_1 + 1)J(r_1) - 4r_1J(r_1 + 1) + 4(r_2 + 1)J(r_2) - -4r_2J(r_2 + 1) + \dots +,$$

 $+4nJ(n-1)-4(n-1)J(n)+...+4\cdot 2nJ(2n-1)-4(2n-1)J(2n)+...,$ 

зміна енергії  $\Delta U$  має вигляд

$$\Delta U' = -2H' - 4(r_1 + 1)J(r_1) + 4r_1J(r_1 + 1) - 4(r_2 + 1)J(r_2) + 4r_2J(r_2 + 1) - \dots -,$$

$$-4(n+1)J(n) + 4nJ(n+1) - \dots - 4(2n+1)J(2n) + 4 \cdot 2nJ(2n+1) - \dots, (8.8)$$

де  $r_i$  — інтервал між спіном, що "перевернувся", і *і*-м спіном, орієнтованим вгору. Цей інтервал визначається натуральним числом, що задовольняє таке співвідношення:

$$r_i \le \frac{n}{m}i < r_i + 1.$$
(8.9)

У рівнянні (8.8) співвідношення  $r_m = n$ ,  $r_{2m} = 2n$  вже враховані. У такий саме спосіб зміна загальної енергії, коли один спін, орієнтований донизу, змінюється на протилежний з тим же значенням q і зовнішнім полем H', може бути записана так:

$$\Delta U' = -2H' - 4(r_1 + 1)J(r_1) + 4r_1J(r_1 + 1) - 4(r_2 + 1)J(r_2) + +4r_2J(r_2 + 1) - \dots - ,$$

 $-4(n+1)J(n) + 4nJ(n+1) - \dots - 4(2n+1)J(2n) + 4 \cdot 2nJ(2n+1) - \dots (8.10)$ 

У стійкому стані, коли загальна енергія має мінімальне значення, при зміні напрямку одиночного спіну загальна енергія буде змінюватися незначно. Це означає, що  $\Delta U$  і  $\Delta U'$  будуть близькі до нуля для стійкої конфігурації. За цих умов для зміни зов-

нішнього поля  $\Delta H = H - H'$  можна записати

$$\frac{1}{2} \Delta H \left( q = \frac{m}{n} \right) = n \{ J(n+1) + J(n-1) - 2J(n) \} + 2n \{ J(2n+1) + J(2n-1) - 2J(2n) \} + \dots + in \{ J(in+1) + J(in-1) - 2L(in) \} + \dots$$
(8.11)

Це рівняння описує зміну H при q = m/n, а значить, завжди можна знайти співвідношення між ними. Зверніть увагу, що правий бік цього рівняння не залежить від m. Оскільки J(i) є ввігнутою функцією, правий бік рівняння (8.11) є позитивним і скінченним для m і n. Таким чином, якщо неперервно змінювати частину спінів, орієнтованих вгору, то при кожному раціональному q з'явиться кінцевий позитивний проміжок.

Отже, це рівняння породжує бісові сходи (див. рис. 2.13), де  $J(t) = t^{-2}$ . Якщо розширити будь-яку частину цих сходів, то завжди знайдуться подібні сходинки, тобто бісові сходи є фракталом, а розглянуту спінову модель однаково заряджених частинок з кулонівською взаємодією можна описати засобами фрактальної геометрії.

Розділ 9=

## МЕТОДИ РЕНОРМУВАННЯ ГРУП, КЛАСТЕРИЗАЦІЇ І ФРАГМЕНТАЦІЇ

#### 9.1. РЕНОРМУВАННЯ ГРУП

У 1982 р. Вілсон отримав Нобелівську премію за внесок у розвиток теорії ренормування груп. Мета методу ренормування груп — описати кількісно зміну фізичної величини, коли змінився рівень структурованості цієї величини при спостереженнях. Скористаємося у подальшому викладенням цього методу, запропонованим у праці [36], яке, на нашу думку, є найдоступнішим.

Нехай  $p \in$  певною фізичною величиною, яка вимірюється у певному масштабі структурованості цієї величини, і нехай та сама величина вимірюється з масштабом, який дорівнює подвоєному розміру структурованості цієї величини, p'. Величина p' пов'язана з початковою величиною p таким співвідношенням структурованості величини  $f_2$ :

$$p' = f_2(p).$$
 (9.1)

Індекс 2 при величині *f* показує рівень структурованості. Якщо масштаб структурованості цієї величини знову подвоїти, то будемо мати таке співвідношення:

$$p'' = f_2(p') = f_2 f_2(p) = f_4(p), \qquad (9.2)$$

де індекс 4 показує новий рівень структурованості.

11\*

Якщо ці співвідношення узагальнити, то перетворення *f* буде мати такі властивості:

$$f_a \cdot f_b = f_{ab}, \ f_1 = 1, \tag{9.3}$$

де індексом 1 показано ідентичне перетворення. Таким чином, для будь-якого певного стану можна легко визначити його структурованість (рис. 9.1,  $\delta$ ). Однак обернений процес, тобто пошук початкового стану, який є певним рівнем структурованості даного стану, не є однозначно визначеним. Дійсно, перетворення fзагалом не має інверсного значення  $f^{-1}$ . Набір перетворень, які мають властивості (9.3), називають квазігрупою. А перетворення структурних груп, з яких складається ця величина, називається ренормуванням групи (якщо бути більш точними, то таке перетворення f повинне називатися "ренормуванням квазігрупи", але словосполучення "ренормування групи" стало широковживаним).

Із наведеного вище означення зрозуміло, що ренормування групи тісно пов'язане з фракталами. Оскільки фрактал є об'єктом, який залишається незмінним при розбитті об'єкта на його утворення, то можна сказати, що фрактал є об'єктом, який інваріантний при перетвореннях ренормування групи. Історично терміни "фрактал" і "ренормування груп" з'явилися водночас незалежно один від одного. Обидва терміни застосовувалися для того, щоб проаналізувати: що є інваріантним при зміні масштабу спостережень — фрактал для геометричних спостережень, а ренормування груп для фізичних величин. Покажемо далі, що застосування фракталів до аналізу фізичних величин, а методу дійсних просторових ренормувань груп до геометричних об'єктів призводить до того, що різниця у термінології стає все менш значущою.

Ренормування груп є потужним засобом для аналізу критичних явищ при фазових переходах. Зокрема, розглянемо стан води поблизу критичної точки між рідинною і газовою фазами. Якщо стан, що розглядається, знаходиться у рідинній фазі, трохи нижче критичної точки, то цей стан мікроскопічно можна описати як випадкову суміш рідини та газу. На кожному кроці від мікро- до макророзмірів структур ті області, де домінує рідина, розглядаються як рідина, і пропорція рідини буде збільшуватися у міру збільшення розміру структур, які розглядаються. Межевий, макроскопічний, стан після багаторазового повторення цього процесу буде спостерігатися як стан тільки рідини. І навпаки, якщо газові області домінують над рідинними на мікроскопічному рівні, то на макроскопічній межі будемо мати тільки газовий стан води.

Використовуючи (9.1)—(9.3), аналізуємо класичний приклад — критичне явище перколяції, використовуючи метод ренормування груп (рис. 9.1,  $\delta$ ). У найнижчому порядку маємо квадратну матрицю з чотирьох елементів. Ймовірність  $p_1$ , що можна протекти крізь комірку першого порядку, визначається у термінах ймовірності  $p_0$ , що можна протекти крізь її окремий елемент першого порядку. Будемо називати комірку, крізь яку можна протекти, такою, якщо існує неперервний шлях для потоку крізь неї зліва направо. Наступною процедурою є ренормування, після чого чотири комірки першого порядку стають чотирма елементами другого порядку у комірці другого порядку. Ймовірність  $p_2$ , що комірка другого порядку є така, що крізь неї можна протекти, визначається в термінах ймовірності  $p_1$ , що елемент другого порядку (комірка першого порядку) є таким, що крізь нього можна протекти. Процес повторюється у все більших і більших масштабах, нагадуючи модель фрактальної фрагментації (параграф 9.2).

Розглянемо перколяційний кластер, який може бути моделлю потоку рідини крізь пористе середовище. Нехай ця модель буде квадратом, який складається з матриці квадратних комірок (n = 256 елементів), при цьому заштрихована комірка означає, що рідина може крізь неї перколювати, а незаштрихована означає, що рідина не може крізь неї перколювати (рис. 9.1, a). Ймовірність того, що крізь елемент можна перколювати (протекти), є  $p_0$ , а ймовірність, що крізь нього не можна протекти, дорівнює  $(1 - p_0)$ .

Визначимо, чи може рідина протекти крізь квадратний рядок. Рядок визначається таким, що крізь нього можна протекти, якщо існує неперевний шлях плинності з лівого боку ряду до правого боку ряду. Застосуємо при цьому статистичний підхід, оскільки розподіл елементів, крізь які можна або не можна протекти, є випадковим. Для певної величини р<sub>0</sub> існує ймовірність Р, що ряд з *n* елементами є таким, що крізь нього можна протекти. Було доведено [31], що для ряду з великою кількістю елементів ймовірність Р має невелике значення (Р << 1), якщо  $0 < p_0 < p^*$ , де  $p^*$  є критичною ймовірністю для перколяційного порогу, і P дорівнює близько одиниці ( $P \approx 1$ ), якщо  $p^* < p_0 < 1$ . Для нас тут важливим є те, що існує критичне значення р\* для потоку рідини крізь матрицю елементів. Якщо ро менше, ніж це критичне значення *p*\*, то великий перколяційний квадрат стає таким, що крізь нього практично не можна протекти. Якщо ро більше, ніж це критичне значення р\*, то перколяційний великий квадрат є таким, що крізь нього можна протекти.

Ймовірність  $p_0$ , що елемент буде таким, що крізь нього можна протекти, дорівнює 0,5 (рис. 9.1,*a*). Заштрихованим або незаштрихованим елементам можна надати значення, що крізь них можна протекти, у будь-якому випадку неможливо знайти шлях ні по горизонталі, ні по вертикалі, крізь який можна було б протекти у цьому перколяційному кластері. На рис. 9.1, *б* подано ілюстрацію методу ренормування груп: чотири квадратних елементи розглянуто на кожному з чотирьох масштабів [36]. Стау-



РИС. 9.1. Матриця з 16×16 квадратних елементів

фер, використавши метод Монте-Карло для числового моделювання великої кількості випадкових реалізацій, показав [30], що для двовимірної квадратної матриці з великим n критична ймовірність для початку потоку на матриці:  $p^* = 0,59275$ .

Стауфер також розглянув статистику "кількість—розмір" для перколяційних кластерів при критичному значенні  $p_0 = p^*$  [30]. Розмір перколяційного кластера він визначив як кількість суміжних елементів, крізь які можна протекти, коли ряд стає таким, що крізь нього можна протекти. Кількість елементів у перколяційному кластері  $n_e^*$  Стауфер визначив числовим методом як функцію розміру матриці *n*. Таким чином, для двовимірних матриць було знайдено [30], що

$$n_e^* \approx n^{91/96} \cdot 5$$
. (9.4)

Якщо порівняти цей результат з детермінованим фракталом — килимом Серпінського (параграф 2.3), вважаючи, що квадрати, які залишаються, і є перколяційним кластером, то отримуємо такі співвідношення. Для килима Серпінського (рис. 2.5)  $n_e = 8$ , коли n = 9, та  $n_e = 64$ , коли n = 81, тобто

$$n_e = n^{\ln 8/2 \ln 3} = n^{D/2} \,. \tag{9.5}$$

Порівнюючи (9.5) з (9.4), отримуємо, що фрактальна розмірність для перколяційного кластера при критичному значенні D = 91/48 = 1,896, що є досить близьким значенням для фрактальної розмірності килима Серпінського  $D = \ln 8/\ln 3 = 1,893$ .

Розглянемо тепер комірку першого порядку і визначимо ймовірність того, що вона є перколяційною, тобто крізь неї можна протекти. Всі можливі конфігурації проілюстровано на рис. 9.2. Ймовірність, що всі чотири елементи є неперколяційними, дорівнює  $(1 - p_0)^4$ , і існує тільки одна така неперколяційна конфігурація (-) для комірки (рис. 9.2, а). Ймовірність, що один елемент є перколяційний і три елементи — ні, дорівнює  $p_0(1 - p_0)^3$ . У цьому випадку існують чотири конфігурації для комірки (рис. 9.2, б). Елемент, крізь який можна протекти, може мати будь-яке з означених положень, але комірка не є перколяційною в жодному з цих положень (-). Ймовірність, що два елементи комірки є перколяційними і два елементи ні, дорівнює  $p_0^2(1-p_0)^2$ . У цьому випадку існує шість незалежних конфігурацій для комірки (рис. 9.2, в). Перша і шоста конфігурації визначають комірку, крізь яку можна перколювати зліва направо (+), інші чотири конфігурації є неперколяційними (-). Ймовірність, що три елементи є перколяційними і два елементи — ні, дорівнює  $p_0^3(1 - p_0)$ . Існує чотири незалежні конфігурації для комірки (рис. 9.2, г). Всі чотири конфігурації визначають комірки, крізь які можна протекти зліва направо (+). Ймовірність, що всі чоти-



РИС. 9.2. Комірка з чотирьох елементів є перколяційною, якщо існує неперервний шлях протікання крізь неї зліва направо: a — всі чотири елементи є неперколяційними;  $\delta$  — один елемент є перколяційним, показано чотири можливі конфігурації; s — два елементи є перколяційними, показано шість можливих конфігурацій; z — три елементи є перколяційними, показано чотири можливі конфігурації; d — всі чотири елементи є перколяційними [36]

ри елементи є перколяційними, дорівнює  $p_0^4$ . Їснує лише одна така конфігурація (+) для комірки (рис. 9.2,  $\partial$ ).

Беручи до уваги всі можливі конфігурації, ймовірність того, що комірка першого порядку є перколяційною, визначається такою формулою:

$$p_1 = 2p_0^2(1-p_0)^2 + 4p_0^3(1-p_0) + p_0^4 = 2p_0^2 - p_0^4.$$
 (9.6)

Ймовірність першого порядку містить у собі дві конфігурації з двома перколяційними елементами, чотири конфігурації з трьома перколяційними елементами, одну конфігурацію з чотирма перколяційними елементами. У процесі ренормування чотири комірки першого порядку стають елементами другого порядку. Після ренормування можна застосувати той самий статистичний підхід, після чого отримуємо

$$p_2 = 2p_1^2 - p_1^4. (9.7)$$

Застосуємо цей результат до комірки *n*-го порядку:

$$p_{n+1} = 2p_n^2 - p_n^4 . (9.8)$$

Для того щоб розглянути фіксовані точки, перепишемо рівняння (9.8) так:

$$f(x) = 2x^2 - x^4. (9.9)$$

Фіксовані точки отримують, якщо f(x) = x:

$$x = 2x^2 - x^4 \,. \tag{9.10}$$

У діапазоні 0 < x < 1 існує три фіксовані точки x = 0; 0,618; 1. Відповідні величини  $\lambda = df/dx$  дорівнюють 0; 1,258; 0. Фіксовані точки при x = 0 і 1 є стабільними, оскільки  $|\lambda| < 1$ ; фіксовані точки при x = 0,618 є нестабільними. Використовуючи (9.7)—(9.10), маємо, що для  $p_0 = 0,4$  розглянута матриця комірок стає неперколяційною ( $p_1 = 0,294$ ,  $p_2 = 0,166$ ,  $p_3 = 0,054$ ), а продовжуючи ітерацію до великих значень n, бачимо, що ймовірність  $p_n$  буде прямувати до стабільної фіксованої точки  $p_n = 0$ . Для  $p_0 = 0,8$  можна знайти, що  $p_1 = 0,87$ ,  $p_2 = 0,941$ ,  $p_3 = 0,987$ , і якщо продовжити ітерацію до великих значень n, то ймовірність  $p_n$  буде прямувати до стабільної фіксованої точки  $p_n = 1$ . Тобто, розглянута матриця комірок стає перколяційною при  $p_0 = 0,8$ . Нестабільна фіксована точка при  $p^* = 0,618$  є критичною. У критичній точці  $p_n = p^*$ , для всіх значень n маємо ймовірність того, що перколяційна комірка

є масштабно інваріантною. Для ймовірностей, менших за критичне значення  $0 < p^0 < p^*$  і ітерація продовжується до неперколяційної межі  $p_n = 0$ . Для ймовірностей, більших за критичне значення  $p^* < p_0 < 1$ , ітерація продовжується до перколяційної межі  $p_n = 1$  (рис. 9.3). На рис. 9.3 критична ймовірність початку процесу перколяції має вигляд  $p^* = 0.618$ ; ітерація для  $p_0 = 0,4$ , яка продовжується до неперколяційної фіксованої точки, така:  $p_{x} = 0$ ; ітерація для  $p_0 = 0.8$ , яка продовжується до перколяційної фіксованої точки подано у вигляді  $p_{\infty} = 1$ .

ки подано у вигляді  $p_{\infty} = 1$ . Для матриці  $3 \times 3$  з дев'ятьма елементами ймовірність  $p_{n+1}$ , що комірка (n + 1)-го порядку є пер вірністю  $p_n$ , що комірка *n*-го поря



РИС. 9.3. Залежність ймовірності  $p_{n+1}$ , що комірка (n + 1)-го порядку є перколяційною, від ймовірності  $p_n$ , що комірка *n*-го порядку є перколяційною [36]

що комірка (n + 1)-го порядку є перколяційною, пов'язана з ймовірністю  $p_n$ , що комірка *n*-го порядку є перколяційною, таким співвідношенням:

$$p_{n+1} = 3p_n^3 + 3p_n^4 - 2p_n^5 - 15p_n^6 + 18p_n^7 - 7p_n^8 + p_n^9.$$
(9.11)

Критичне значення для початку процесу перколяції:  $p^* = 0,609.$ 

У випадку матриці тривимірних кубів, що будуються з n кубічних елементів, критична ймовірність на початку процесу перколяції:  $p^* = 0,3117$  [30]. Фрактальне співвідношення для такої матриці має розмірність D = 2,5. Якщо порівняти цей результат із детермінованим фракталом, губкою Менгера, вважаючи, що куби, які залишаються, є перколяційним кластером, то отримуємо для губки Менгера:  $n_e = 20$  при n = 27;  $n_e = 400$  при n = 729; D = 2,727.

Розглянутий метод ренормування групи важливий не тільки для розрахунків протікання рідини, зокрема нафти, крізь різні пористі середовища. Він ефективно використовується для розв'язання задач виникнення електричної провідності в мережі електричних провідників та ізоляторів; розрахунків фрагментації та ймовірності розривів розломів тектонічних плит Землі, що призводять до землетрусів, тощо.

### 9.2. ФРАКТАЛЬНА ФРАГМЕНТАЦІЯ

Одним із прикладів фрактальних розподілів є фрагментація. Фрагментація відіграє важливу роль в різних геологічних явищах. Зокрема, земна кора фрагментована тектонічними процесами, включаючи зсуви, розломи, місця стикування; каміння фрагментовано внаслідок кліматичних процесів як природного характеру, так і викликаних діяльністю людини; вулканічні виверження є прикладом природного вибухового процесу, внаслідок чого народжуються фрагментовані викиди.

Опис процесу фрагментації є досить нетривіальною задачею, оскільки містить у собі як ініціацію, так і поширення розломів у фрагментах. Цей процес є нелінійним, і навіть у випадку найпростішої конфігурації потрібні складні моделі. Крім того, фрагментація містить у собі взаємодію між розломами і фрагментами у широкому діапазоні масштабів. Застосування фрактальних концепцій для фрагментації є ефективним. Оскільки фрагменти народжуються у широкому діапазоні розмірів, можна очікувати, що розподіли числа фрагментів як функції їх розмірів будуть фрактальними.

Для опису розподілу частота фрагментів, що зустрічаються розмір фрагментів використовуються різноманітні статистичні моделі. Найбільш уживаним емпіричним описом є степенева залежність загального вигляду

$$N(>m) = Cm^{-b}, (9.12)$$

де N(>m) — кількість фрагментів з масою, більшою за *m*. Сталі *C* і *b* вибираються у такий спосіб, щоб узгодити спостережувані розподіли. Для нас цікаво те, що стала *b* еквівалентна фрактальній розмірності *D*. Покажемо це [36]. Оскільки фрагменти мають різні форми, кубічний корінь об'єму може бути об'єктивною характеристикою розміру фрагмента:  $r = V^{1/3}$ . Оскільки густина фрагмента є стала величина, можемо записати  $m \approx r^3$ , а порівняння формули (9.12) з фрактальним розподілом  $N = C/r^D$  дає

$$D = 3b$$
. (9.13)

Отже, розподіл частота фрагментів, що зустрічаються—розмір фрагментів (9.12) є еквівалентним фрактальному розподілу (9.13), де D — фрактальна розмірність.

Альтернативною емпіричною кореляцією для розподілу частота фрагментів, що зустрічаються — розмір фрагментів є так зва-

ний розподіл Вейбулла:

$$\frac{M(\langle r)}{M_0} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu}\right], \qquad (9.14)$$

де  $M(\leq r)$  — кумулятивна маса фрагментів розмірами, меншими ніж r;  $M_0$  — загальна маса фрагментів,  $r_0$  — середня. Степінь v має довільне стале значення, що вибирається як ціле число. Якщо v = 2, то рівняння (9.14) є так званим квадратичним розподілом Вейбулла.

Розподіл Вейбулла є досить зручним у практичному використанні, оскільки дає розподіл розмірів у термінах маси. Загальна маса фрагментів розміром, меншим, ніж наперед означений розмір, може бути легко отримана методом "просіювання", тобто зважуванням фрагментів, які пройшли крізь "решето" з наперед означеною апертурою.

Для загальної маси фрагментів можна записати

$$M(>r) + M($$

де M(>r) — кумулятивна маса фрагментів розмірами, більшими за *г*. Комбінування рівнянь (9.14) і (9.15) приводить до співвідношення

$$\frac{M(>r)}{M_0} = \exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{v}\right],\tag{9.16}$$

яке є цілком еквівалентним розподілу Вейбулла (9.14).

Для невеликих значень  $(r/r_0)^{v}$  можемо розкласти в ряд Тейлора:

$$\exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{v}\right] = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{v} + \dots, \qquad (9.17)$$

де високими членами розкладу знехтувано. Підставляючи (9.17) у формулу розподілу Вейбулла (9.14), маємо

$$\frac{M(< r)}{M_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu}.$$
(9.18)

Отже, для фрагментів з малими розмірами розподіл Вейбулла приводить до степеневого розподілу. Зіставимо степеневий роз-

поділ (9.18) із фрактальним розподілом для кількості фрагментів  $N = C/r^{D}$ . Взявши похідну від виразу (9.18), отримаємо

$$dM \approx r^{\nu-1} dr \,. \tag{9.19}$$

Похідна від фрактального розподілу  $N = C/r^{D}$  становить

$$dN \approx r^{-D-1} dr \,. \tag{9.20}$$

Оскільки збільшення кількості фрагментів пов'язане зі збільшенням маси таким співвідношенням:

$$dN \approx r^{-3} dM , \qquad (9.21)$$

то, підставляючи (9.19) і (9,20) у (9.21), маємо

$$r^{-D-1} \approx r^{-3} r^{\nu-1} , \qquad (9.22)$$

або для фрактальної розмірності

$$D = 3 - v$$
. (9.23)

Візьмемо похідну від співвідношення Вейбулла (9.14) і отримаємо таку функцію розподілу:

$$f_{W}(r) = \frac{vr^{v-1}}{r_{0}^{v}} \exp\left[-\left(\frac{r}{r_{0}}\right)^{v}\right],$$
(9.24)

де  $f_W(r)dr$  — маса фракцій фрагментів з лінійними розмірами між r і r + dr. Інтеграл цієї функції f(r) від r = 0 до  $\infty$  дорівнює одиниці (нормований), оскільки він містить у собі всі фрагменти.

Досить часто використовують логарифмічну функцію розподілу

$$f_{\ln}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma r} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln r - \mu}{\sigma}\right)^2\right],$$
 (9.25)

де  $\sigma$  і  $\mu$  є вільними параметрами, пов'язаними з середнім та дисперсією розподілу. Відповідно, середній радіус  $\bar{r}$  для фрагментів з логарифмічним розподілом є:

$$\bar{r} = \int_{0}^{\infty} r f_{\ln}(r) dr = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^{2}).$$
(9.26)

Дисперсія И для логарифмічного розподілу фрагментів має вигляд

$$V = \int_{0}^{\infty} (r - r)^{2} f_{\ln}(r) dr = \exp(2\mu + \sigma^{2})(\exp \sigma^{2} - 1). \qquad (9.27)$$

На відміну від розподілу Вейбулла логарифмічний розподіл не є масштабно інваріантним (не має степеневий характер).

Для загальної маси (об'єму) фрагментів маємо

$$V = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^3 dN , \qquad (9.28)$$

де верхню і нижню границі фрагментації у загальному випадку можна встановити у такий спосіб: верхня границя ( $r_{max}$ ) визначається загальним розміром об'єкта або областю, яка фрагментована; нижня границя ( $r_{min}$ ) визначається масштабом неоднорідності, яка відповідає за фрагментацію, наприклад розміром гранули.

Для степеневого (фрактального) розподілу розміру об'єктів, підстановка (9.20) у (9.28) і інтегрування приводить до співвідношення

$$V \approx \frac{1}{3-D} \left( r_{\max}^{3-D} - r_{\min}^{3-D} \right) \,. \tag{9.29}$$

Якщо 0 < D < 3, то необхідно визначити  $r_{max}$ , а не  $r_{min}$  для того, щоб отримати граничний об'єм (масу) фрагментів. У цьому випадку об'єм (маса) фрагментів визначається найбільшими фрагментами. Якщо D > 3, то необхідно визначити  $r_{min}$ , а не  $r_{max}$ , бо у цьому випадку домінує об'єм (маса) малих фрагментів.

Можна також розрахувати загальну площу поверхні *А* фрагментів:

$$A = C \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^2 dN , \qquad (9.30)$$

де C — параметр, що відповідає за усереднену форму фрагментів. Для степеневого розподілу підстановка (9.20) у (9.30) і інтегрування дає

$$A \approx \frac{C}{D-2} \left( \frac{1}{r_{\min}^{D-2}} - \frac{1}{r_{\max}^{D-2}} \right).$$
(9.31)

Якщо 0 < D < 2, то необхідно визначити  $r_{max}$ , а не  $r_{min}$ , щоб отримати граничну загальну площу поверхні для фрагментів. Якщо D > 2, то необхідно визначити  $r_{min}$  для того, щоб отримати граничне значення загальної площі поверхні, до речі, у більшості розподілів фрагментів домінує площа поверхні найменших фрагментів.

#### 9.3. ФРАКТАЛЬНА КЛАСТЕРИЗАЦІЯ

Розглянемо фрактальний розподіл, множину Кантора (параграф 2.2), і з'ясуємо ймовірності послідовних кроків розбиття цієї множини. У нульовому наближенні ймовірність, що крок довжиною  $r_0 = 1$  буде містити у собі лінійний сегмент, дорівнює  $p_0 = 1$ ; відповідно, у першому наближенні маємо  $r_1 = 1/3$  і  $p_1 = 2/3$ , а у другому —  $r_2 = 1/9$  і  $p_2 = 4/9$ . Цю ймовірність, що крок довжиною  $r_i$  буде містити у собі лінійний сегмент, можна узагальнити у вигляді

$$p_n = N_n r_n \,, \tag{9.32}$$

де  $N_n$  є кількістю лінійних сегментів довжиною  $r_n$ . Вважаючи C = 1 у виразі для фрактального розподілу  $N_n = C/rn^D$ , отримуємо, що кількість лінійних сегментів  $N_n$  пов'язана з довжиною  $r_n$  таким чином, що ймовірність має вигляд

$$p_n = r_n^{1-D} \,. \tag{9.33}$$

Для вибірки Кантора ймовірність, що крок довжиною  $r_n = (1/3)^n$  містить у собі лінійний сегмент, дорівнює  $p_n = (2/3)^n$ , а фрактальна розмірність  $D = \ln 2/\ln 3$ . Множина Кантора є детермінованим і масштабно інваріантним фракталом. Для того щоб позбутися детермінованості (масштабно-інваріантну випадкову вибірку можна згенерувати) виключаючи не, як завжди, середню, а будь-яку третину кожної лінії (рис. 9.4). При цьому фрактальна розмірність залишалася незмінною, як і співвідношення для ймовірності (9.33).



Перейдемо до поняття фрактальної кластеризації. Для цього розглянемо N точкових подій, які трапляються за часовий інтервал  $\tau_0$ , та введемо період  $\tau_N = \tau_0/N$ . Послідовність інтервалів визначимо так:

$$\tau_n = \tau_0 / n, \ n = 1, 2, ..., N_{\odot}.$$
 (9.34)

Мірою кластеризації буде слугувати ймовірність  $p_n$ , така, що подія трапляється в інтервалі часу довжиною  $\tau_n$ . Зокрема, розглянемо однорідну (рівномірно розподілену в часі) серію N подій, які трапляються на інтервалі  $\tau_0$ . Перша подія трапиться у час  $t = \tau_0/2N$ , друга подія — у час  $t = 3\tau_0/2N$ , третя подія — у час  $t = 5\tau_0/2N$  і т. ін. Якщо подія трапиться на певному інтервалі часу, то ймовірність  $p_n$  визначається так:

$$p_{n} = \begin{cases} \frac{\tau_{n}N}{\tau_{0}} = \frac{N}{n}, & if\tau_{n} < \frac{\tau_{0}}{N}, \\ 1 & , if\tau_{n} > \frac{\tau_{0}}{N}. \end{cases}$$
(9.35)

Якщо кількість подій N більша за кількість інтервалів n, то N > n або  $\tau_n > \tau_0/N$ . У цьому випадку подія трапляється на кожному інтервалі таким чином, що  $p_n = 1$ . Якщо кількість подій N менша за кількість інтервалів n, то N < n або  $\tau_n < \tau_0/N$ . Тут тільки N подій з n інтервалів містять у собі подію таким чином, що  $p_n = N/n$ . А оскільки кластеризація відсутня, то немає інтервалів  $\tau_n$ , які містять у собі більше, ніж одну подію.

Розглянемо більш реалістичну модель для серії подій у часі, коли їх поява абсолютно некорельована, наприклад телефонні дзвінки у місті протягом вибраної години. Якщо N подій трапляється випадково у часовому інтервалі  $\tau_0$ , то це є, як відомо, пуассонівський розподіл. При наближенні до граничної великої кількості подій ( $N \to \infty$ ) розподіл інтервалів між подіями має такий вираз:

$$f(\tau) = \frac{N}{\tau_0} \exp\left(\frac{-N\tau_0}{\tau_0}\right),\tag{9.36}$$

де  $f(\tau)d\tau$  — ймовірність того, що подія трапиться у інтервалі часу довжиною { $\tau$ ,  $\tau + d\tau$ }. Цей розподіл не є масштабно-інваріантним, оскільки містить у собі звичайний масштабний чинник  $\tau_0/N$ .

Тепер визначимо ймовірність p, таку, що інтервал довжиною  $\tau_n$  містить у собі подію, якщо N подій трапляється випадково в

інтервалі часу  $\tau_0$ . Це класичний приклад задачі випадкового розподілу N куль у n кубах. Введемо величину  $P_m = m/n$ , де m кількість інтервалів, які містять у собі події, а  $n = \tau_0/\tau_N$  — загальна кількість інтервалів. Будемо вважати, що m і  $n \in$  цілі числа. Ймовірність, що  $P_m$  має певне значення, така:

$$f_m(P_m) = \left(\frac{n}{n(1-P_m)}\right) \sum_{\mu=0}^{nF_m} (-1)^{\mu} \left(\frac{nP_m}{\mu}\right) \left(P_m - \frac{\mu}{n}\right)^N , \qquad (9.37)$$

де  $\sum_{m=0}^{n} f_m(P_m) = 1$ . Біномний коефіцієнт має вигляд

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n!}{m! \left(n - m\right)!}.$$
(9.38)

При великих значеннях N і n ймовірність  $f_n(P_m)$  з виразу (9.37) має значний максимум з визначеними величинами  $P_m$ , p.

Для ілюстрації ймовірнісного підходу до фрактальної кластеризації розглянемо випадкову вибірку Кантора дев'ятого порядку. По-перше, перемасштабуємо її таким чином, щоб одинична довжина була довжиною елемента дев'ятого порядку. Тоді довжина елемента нульового порядку дорівнює  $3^9$  і існує  $2^9$  елементів дев'ятого порядку. Для того щоб визначити фрактальну розмірність кластеризації методом підрахунку скриньок, виберемо інтервали довжиною  $r_n = 2^n$  та визначимо частку p, яка містить у собі принаймні, один елемент дев'ятого порядку як функцію  $r_n$ . Вона дорівнює  $p \approx r^{0.368}$ , а фрактальна розмірність  $D \approx 0,632$ . Якщо саме таку кількість елементів розподілити однорідно (кластеризація відсутня), то ймовірність знайти елемент вибірки можна отримати з (9.36). У цьому випадку фрактальна розмірність D = 0 для  $r < (3/2)^9$  і D = 1 для  $r > (3/2)^9$ .

Розглянемо тепер килим Серпінського (параграф 2.3). У нульовому порядку ймовірність, що квадрат розміром  $r_0 = 1$  буде містити у собі залишений квадрат, така:  $p_0 = 1$ , у першому порядку маємо  $r_1 = 1/3$  і  $p_1 = 8/9$ , у другому порядку маємо  $r_2 = 1/9$  і  $p_2 = 64/81$ . Ймовірність, що квадрат розміром  $r_i$  буде містити у собі залишений квадрат, може бути узагальнена:

$$p_i = N_i r_i^2$$
, (9.39)

тоді аналогічно (9.32), (9.33) маємо

$$p_i = r_i^{2-D}$$
. (9.40)

Для килима Серпінського ймовірність, що квадрат розміром  $r_i = (1/3)^i$  буде містити у собі залишений квадрат, така:  $p_i = (8/9)^i$ , а фрактальна розмірність  $D = \ln 8/\ln 3$ . Отже, килим Серпінського можна застосовувати до двовимірної кластеризації так само, як вибірку Кантора до одновимірної кластеризації.

У випадку тривимірної кластеризації можна використати інший детермінований фрактал, губку Менгера. У нульовому порядку ймовірність, що куб розміром  $r_0 = 1$  буде містити у собі залишений куб, має вигляд  $p_0 = 1$ , у першому порядку  $r_1 = 1/3$  і  $p_1 = 20/27$ , у другому порядку  $r_2 = 1/9$  і  $p_2 = 400/729$ . Таким чином, ймовірність, що куб розміром  $r_i$  буде містити у собі залишений куб, має вигляд

$$p_i = N_i r_i^3$$
, (9.41)

а також

$$p_i = r_i^{3-D}$$
. (9.42)

Для губки Менгера ймовірність, що куб розміром  $r_i = (1/3)^i$  містить у собі залишений куб, така:  $p_i = (20/27)^i$ , отже,  $D = = \ln 20/\ln 3$ .

Узагальнення (9.40), (9.41) і (9.42) приводить до виразу ймовірності фрактальної кластеризації:

$$p_i = r_i^{d-D}, \qquad (9.43)$$

де *d* — евклідова розмірність фігури, яка розглядається.

Розділ 10\_

# ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС ТА НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

## 10.1. ДИНАМІКА НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ТА ХАОС

У нелінійних динамічних системах, що описуються нелінійними рівняннями з регулярними (невипадковими) коефіцієнтами, і в яких здійснюються коливання під дією регулярних зовнішніх сил, можуть виникати хаотичні коливання. Слід розрізняти хаотичний та випадковий рухи. Випадковим рухом називають рух, коли діючі на систему сили є невідомими, а відомі тільки їх статистичні характеристики. Хаотичний рух — це рух, який характеризується двома умовами: по-перше, існує значна залежність від початкових умов, по-друге, фазова траєкторія системи повертається в обмежену область фазового простору. Тобто, як завгодно мала, але скінченна неточність у початковому стані системи зумовлює велику різницю між параметрами системи у кінцевому стані. При хаотичних коливаннях втрачається інформація про початковий стан і передбачити поведінку системи стає неможливим. Для такого руху, зокрема, характерна наявність неперервного спектра частот, розташованого нижче частоти дії.

У "дохаотичні" часи було відомо три види динамічного руху: рівновага, періодичний рух, або граничний цикл, та квазіперіодичний рух. Ці стани одержали назву атракторів, оскільки у присутності згасання всі перехідні процеси зі збільшенням часу згасають і система "притягується" до одного з перелічених станів. Хаотичні коливання становлять новий клас руху, який пов'язаний зі станом, що називається дивним атрактором.

Класичним атракторам відповідають класичні геометричні образи в тривимірному фазовому просторі: рівноважному стану — точки, граничному циклу — замкнені криві, квазіперіодичному руху — поверхні. Дивний атрактор, як виявилось, пов'язаний з таким геометричним образом, як фрактал.

Фрактал є досить зручним засобом отримання інформації про об'єкти, для яких традиційний процес вимірювання довжин,
площ, об'ємів не дає повних результатів. Саме до таких об'єктів належить, зокрема, дивний атрактор.

Хаотичні явища у дисипативних нелінійних системах виникають за регулярними законами і за ними "стоїть" не безформний хаос, а хаос зі схованим порядком — фрактальна структура. Кількісною мірою хаотичних коливань є показники Ляпунова або пов'язані з ними фрактальні розмірності. Це дає можливість, зокрема, передбачати деякі властивості систем із шумами.

Навколишній світ в широкому розумінні є нелінійна динамічна система або набір таких систем. Сучасна нелінійна динаміка запровадила нові ідеї геометрії та топології — фрактальні множини, без опанування яких неможливе більш глибоке розуміння природи.

Розглянемо поведінку деякої одновимірної нелінійної коливальної системи, яку будемо описувати у змінних дія—кут за допомогою гамільтоніана вигляду:

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \varphi) f(t).$$
(10.1)

Тобто, рух нелінійної системи збурюється зовнішньою силою, яка залежить від часу, є — безрозмірна величина збурення. Рівняння руху, які описують поведінку цієї системи, мають вигляд

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \varphi)}{\partial \varphi} f(t),$$
  
$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \varphi)}{\partial I} f(t),$$
 (10.2)

де  $\omega(I) = \frac{dH_0}{dI}$  — частота коливань незбуреної системи.

Введемо дисипацію. Для незбуреної системи маємо

$$I = -\widetilde{\gamma}(I - I_0), \qquad (10.3)$$
  
$$\dot{\omega} = \omega(I).$$

де  $I_0$  — адіабатичний інваріант незбуреної системи,  $\tilde{\gamma}$  — ко-ефіцієнт в'язкості.

Комбінуючи (10.2) та (10.3), знаходимо рівняння руху для збуреної системи із в'язкістю:

$$\dot{I} = -\widetilde{\gamma}(I - I_0) - \varepsilon \frac{\partial V(I, \varphi)}{\partial \varphi} f(t) ,$$

179

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \varphi)}{\partial I} f(t)$$
 (10.4)

Нехай f(t) — періодична функція з періодом T: f(t + T) = f(t), а збурення задається співвідношенням  $V(I, \varphi) = \frac{I_0}{T} \cos \varphi$ .

Вводячи позначення

$$y = \frac{I - I_0}{I_0}, \ x = \frac{\phi}{2\pi}, \ \tau = \frac{t}{T}, \ \gamma = \tilde{\gamma}T,$$
 (10.5)

систему (10.4) можна звести до вигляду

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma y - \varepsilon f(\tau) \cos(2\pi x) ,$$
$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega(y)}{2\pi} T . \qquad (10.6)$$

Ця система описує нелінійний осцилятор із затуханням під впливом параметричної зовнішньої сили.

Нехай зовнішня сила має вигляд миттєвих поштовхів, тоді маємо

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n) \, .$$

Між двома послідовними поштовхами система здійснює вільний рух із дисипацією:

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma y , \ \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega(y)}{2\pi} T .$$

Якщо, наприклад,  $\omega(y) = \omega_0(1 + \alpha y)$ , де  $\omega_0$  — частота лінійних коливань,  $\alpha$  — сталий параметр, що характеризує нелінійність системи, то:

$$y(\tau) = y(\tau_0) \exp\{-\gamma(\tau - \tau_0)\},$$
$$x(\tau) = x(\tau_0) + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi\gamma} \left[1 - \exp\{-\gamma(\tau - \tau_0)\}\right].$$

Фазова траєкторія цієї системи y(x) є звичайною гладкою лінією.

При переході через точку поштовху необхідно проінтегрувати систему (10.6) у малому околі, що містить у собі одну з δ-функ-

цій. Після інтегрування для приростів бх і бу знаходимо

 $\delta y = -\varepsilon \cos(2\pi x), \ \delta x = 0.$ 

Побудуємо відображення отриманої системи, тобто будемо описувати динаміку системи не диференціальними рівняннями, а рівняннями у скінченних різницях.

Введемо вектор r(t) = (p(t), q(t)), який визначає точку у фазовому просторі (p, q) — імпульс-координата. Еволюцію системи можна задати за допомогою оператора зсуву в часі:

$$r(t+T)=Tr(t).$$

Якщо на систему діє періодична сила, то H(p, q, t + T) = H(p, q, t), і можна знайти розв'язок динамічних рівнянь на інтервалі  $[t_0, t_0 + T]$ , а потім за допомогою зшивання знайти явний вигляд оператора зсуву:

$$r_n = T^n r_0, \ r_n = (p(t_n), q(t_n)).$$

Зведення диференціальних рівнянь до відображень іноді дозволяє спростити задачу. Однак слід зазначити, що за заданим відображенням не завжди вдається побудувати еквівалентне диференціальне рівняння.

Отже, нехай  $y_n = y(n\Delta \tau)$ ,  $x_n = x(n\Delta \tau)$ , де  $\Delta \tau$  — сталий проміжок часу. Тоді

$$y_{n+1} = e^{-\gamma} \big[ y_n + \varepsilon \cos(2\pi x_n) \big],$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\omega_0 T}{2\pi} \left( 1 + \alpha \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} y_n \right) + \frac{K}{2\pi} \cos(2\pi x_n) \pmod{1},$$

де  $K = \varepsilon \alpha \omega_0 T \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma}$ . Якщо виконати заміну  $z = \alpha \frac{\omega_0 T (e^{\gamma} - 1)}{2\pi \gamma} y$ ,

то отримуємо так зване стандартне дисипативне відображення:

$$z_{n+1} = z_n e^{-\gamma} + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n), \ x_{n+1} = x_n + z_{n+1} \pmod{1}.$$
(10.7)

Якобіан цього відображення при  $\gamma \neq 0$  задовольняє нерівність

$$J = \frac{\partial(y_{n+1}; x_{n+1})}{\partial(y_n; x_n)} = e^{-\gamma} < 1, \qquad (10.8)$$

яка пояснюється наявністю дисипації.

Система рівнянь (10.7) на фазовій площині визначає множину точок, яку називають стохастичним атрактором. Визначимо розмірність Хаусдорфа цього атрактора.

Нехай  $\lambda_n^+$ ,  $\lambda_n^-$  — характеристичні числа відображення (10.7) на *n*-му кроці. Тоді  $\lambda_n^+ \lambda_n^- = e^{-\gamma}$ , яке не залежить від *n*.

Припустимо, що відображення характеризується двома сталими, тобто незалежними від *n*, характеристичними числами  $\Lambda^+$ ,  $\Lambda^-$ . У цьому випадку на фазовій площині існує деякий напрямок, уздовж якого елемент фазового об'єму розтягується у  $\Lambda^+$  разів, і ортогональний до нього напрямок, уздовж якого елемент фазового об'єму стискається у  $\Lambda^-$  разів. Якщо у формулі (1.11) для фрактальної розмірності вибрати  $r = \text{const}(\Lambda^-)^n$  на *n*-му кроці відображення, то кількість комірок, необхідних для покриття деформованого елемента фазового об'єму обчислюється за формулою

$$N = \operatorname{const} \frac{(\Lambda^{+})^{n}}{r} = \operatorname{const} \left( \frac{\Lambda^{+}}{\Lambda^{-}} \right)^{n}$$

З урахуванням цих рівнянь отримуємо для розмірності самоподібності (1.11) стохастичного атрактора вираз

$$D_s = -\lim \frac{N}{r} = \lim \frac{\operatorname{const} + n(\ln \Lambda^+ - \ln \Lambda^-)}{\operatorname{const} - n \ln \Lambda^-} = 1 - \frac{\ln \Lambda^+}{\ln \Lambda^-}.$$
 (10.9)

3 урахуванням (10.8) записуємо

$$D_s = 1 + \frac{\ln \Lambda^+}{\ln \Lambda^+ + \gamma} < 2 ,$$

тобто розмірність атрактора дробова і ми маємо фрактальну криву.

Якщо характеристичні числа відображення залежать від n, як це існує для (10.7), то для обчислення фрактальної розмірності також можна користуватися формулою (8.2), але треба перевизначити параметри

$$\Lambda^{\pm} = \lim_{m \to \infty} \left| \lambda_1^{\pm} \lambda_2^{\pm} \cdots \lambda_m^{\perp} \right|^{m^{-1}}.$$

Цю формулу можна спростити. Подамо  $\Lambda^{\pm}$  у вигляді

$$\Lambda^{\pm} = \lim_{m \to \infty} \exp \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \ln \left| \lambda_{k}^{\pm} \right| \right\} = \exp \left\langle \ln \left| \lambda^{\pm} \right| \right\rangle,$$

де введено позначення

$$\langle f(\lambda) \rangle = \int dx dz f(\lambda(x, z)) \rho(x, z) ,$$
 (10.10)

 $\rho(x, z) - функція розподілу на атракторі.$ 

Таким чином,

$$D_s = 1 + \frac{h}{h + \gamma} \,,$$

де  $h = \langle \lambda^+ \rangle$ .

При малих значеннях дисипації  $D_s \approx 2 - \gamma/h$  для великих K існують співвідношення  $\lambda^+ \sim K$ ,  $\lambda^- \sim e^{-\gamma}/K$ ,  $D_s \approx 2 - \gamma/\ln K$ .

Слід зазначити, що рівняння (10.7) та відповідне їм відображення (10.8) будуть описувати хаотичну поведінку та мати фрактальні властивості не за будь-яких значень параметрів  $\gamma$  і *K*. Зокрема, для стандартного дисипативного відображення (10.7) умова виникнення хаотичності має вигляд *K* >> 1.

Розглянемо більш детально процес зародження стохастичності. Введемо розширений фазовий простір усіх динамічних змінних I,  $\phi$  та усіх параметрів K динамічних рівнянь. Нехай всі ці параметри та сили, що діють на систему, не є випадковими. Незважаючи на це, у деякій області розширеного фазового простору G<sub>s</sub> динаміка системи може бути хаотичною. Хаотичність означає, що немає можливості розрізнити динамічний рух —  $I = I(t, I_0, \phi_0, K), \phi = \phi(t, I_0, \phi_0, K),$  отриманий унаслідок розв'язку динамічних рівнянь, від деякого випадкового процесу. Явище хаосу притаманне тільки нелінійним системам. Воно може відбуватися у системах з  $N \ge 3/2$  ступенів вільності. Зазначимо, що область хаотичності G<sub>s</sub> динамічної системи може бути або дуже малою, або зовсім не мати реального фізичного змісту для задачі, що розглядається. Унаслідок цього хаотичні прояви у детермінованих динамічних системах можуть бути або непомітними, або зовсім не спостерігатися за умов, у яких відбувається фізичне явище.

Для виникнення хаотичного руху у динамічній системі необхідно, щоб усі (або майже усі) фазові траєкторії, які починаються усередині деякої області, розбігалися і щоб усі ці траєкторії залишалися усередині деякого скінченного фазового об'єму. Математичним критерієм хаотичності служить нестійкість усіх (або майже усіх) траєкторій, які розташовані в скінченній області фазового простору. Така поведінка фазових траєкторій можлива тільки у просторі трьох та більше вимірів. За своєю поведінкою всі динамічні системи можуть бути умовно розподілені на дві сукупності: "грубі" та біфуркаційні. За Андроновим та Понтрягіним, "грубі" системи — це такі системи, фазовий портрет яких топологічно не змінюється за малої зміни параметрів системи. Якщо фазова траєкторія системи за малої зміни параметрів системи суттєво змінюється, то таку систему називають біфуркаційною. Біфуркація — математичний образ, який відповідає перебудові характеру руху фізичної системи. Зрозуміло, що хаотичний рух може виникати тільки у біфуркаційних системах.

Для таких систем можна застосувати поняття ансамблю, як сукупності відрізків фазових траєкторій системи усередині деякого елемента фазового простору. Цей ансамбль визначають, задаючи функцію розподілу ймовірності ( $\rho(x,y)$ , (10.10)) у фазовому просторі. Фізично це відповідає розгляду еволюції ансамблю тотожних систем із різними початковими умовами. Перехід до ансамблю не додає ймовірнісного чинника до властивостей детермінованої системи. Це тільки засіб для кількісного визначення траєкторій з тими чи іншими властивостями.

Всі хаотичні системи мають властивості ергодичності та перемішування.

Рух називається ергодичним, якщо існує рівність часових та фазових середніх, тобто, якщо

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}f[r(\tau)]d\tau=\langle f\rangle,$$

де середнє за фазовим простором  $\langle f \rangle$  обчислюється за формулою (10.10). Слід зазначити, що ця формула не залежить від вибору початкової точки *t* інтервалу усереднення. Для ергодичних систем, що задаються за допомогою відображень, існує співвідношення:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f[\widehat{T}^n r] = \langle f \rangle.$$

Ідея ергодичності полягає у тому, що фазова траєкторія досить повно заповнює поверхню сталої енергії у фазовому просторі. Властивість ергодичності є досить грубою характеристикою динамічної системи і вона притаманна майже всім системам, які здійснюють фінітний рух (як періодичний, так і хаотичний).

Ще одна властивість, яку мають динамічні системи, що здійснюють хаотичний рух, — перемішування.

Нехай f(r), g(r) — дві довільні функції, які залежать від координат фазового простору. Назвемо кореляційною функцією, або корелятором, величину

$$\Re(f,g;T) = \left\langle f(\widehat{T}r)g(r) \right\rangle - \left\langle f(r) \right\rangle \langle g(r) \rangle,$$
  
$$\Re_n(f,g) = \left\langle f(\widehat{T}^n r)g(r) \right\rangle - \left\langle f(r) \right\rangle \langle g(r) \rangle.$$

При перемішуванні відбувається розщеплення парних середніх при  $t \to \infty$ , тобто корелятор буде затухати:

$$\lim_{T\to\infty}\Re(f,g;T)=0\,,\,\,\lim_{n\to\infty}\Re_n(f,g)=0\,.$$

Рух фазової краплини при перемішуванні складний. Межа краплі приймає порізану форму. Їз збільшенням часу крапля заповнює різні області фазового простору, при цьому вона витягується, а її відростки стоншуються. Властивість перемішування означає, що досить швидко і досить рівномірно перемішуються дві рідини: фазова рідина і область, не зайнята нею.

Із умови перемішування автоматично витікає умова ергодичності. Для встановлення різниці між цими умовами введемо поняття спектральної густини корелятора  $\Re(\omega)$  за формулою

$$\Re(f,g;T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i\omega T\} \Re(\omega) d\omega.$$

При ергодичному русі без перемішування спектр корелятора дискретний, тобто

$$\Re(\omega) = \sum_{k} \Re_{k} \delta(\omega - \omega_{k}) ,$$

що відповідає квазіперіодичному руху системи з можливо нескінченним набором частот  $\omega_k$ . При такому русі траєкторія системи послідовно замітає фазовий простір. При русі з перемішуванням спектр частот корелятора неперервний. Фазова траєкторія системи поводить себе таким чином: спочатку за деякий час T траєкторія рівномірно заповнює сіткою весь фазовий простір. Через час 2T траєкторія приблизно повторюється, так, що розміри комірки сітки стають у два рази меншими.

Таким чином, хаотичний атрактор має такі властивості:

— хаотичний атрактор займає обмежену область фазового простору, до якої через досить великий інтервал часу притягуються всі досить близькі фазові траєкторії із так званої області притягання. Сам атрактор складається з однієї траєкторії.

— статистичний атрактор залежить від початкових умов. Незважаючи на загальне стискання в об'ємі, не відбувається скорочення довжин у всіх напрямках, і відстань між початково як завгодно близькими точками на атракторі через досить великий проміжок часу стає скінченною. Хаусдорфова розмірність хаотичного атрактора є дробовою.

— хаотичний атрактор, що описує фізичну систему, є структурно-стійким. Множина параметрів динамічної системи, яка породжує хаотичний атрактор, не є множиною міри нуль. При малій зміні цих параметрів структура хаотичного атрактора змінюється неперервно.

На завершення цього розділу зауважимо, що системи парних нелінійних диференціальних рівнянь можуть також мати розв'язки, які будуть прикладами детермінованого хаосу. Класичним таким прикладом є рівняння Лоренца. У 1963 р. Е. Лоренц, метеоролог за фахом, отримав систему трьох загальних диференціальних рівнянь як наближення теплової конвекції в рідинному прошарку, який підігрівається знизу. Він показав, що розв'язки цих рівнянь у певному діапазоні параметрів мають експоненціальну залежність від початкових умов. Тобто, є прикладом детермінованого хаосу. У цій праці, що вже стала історичною, вперше було продемонстровано закони хаотичної поведінки, пізніше рівняння Лоренца було досліджено у праці [29].

#### 10.2. ХАОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Перед тим, як описати хаотичні розв'язки, звернемо увагу на сингулярні точки. Розглянемо пару лінійних загальних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = ay + bx , \qquad (10.11)$$

$$\frac{dx}{dt} = cy + fx, \qquad (10.12)$$

де *a*, *b*, *c*, *f* — сталі. Поділимо (10.11) на (10.12):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + bx}{cy + fx}.$$
(10.13)



РИС. 10.1. Графіки розв'язків безрозмірного рівняння Ван-дер-Поля у фазовій площині при  $\varepsilon = 0$  (*a*), при  $\varepsilon = 1$  (*b*)

Якщо b = -c та a = f = 0, то розв'язком цього рівняння є коло в *х*0*у*-площині (рис. 10.1). Якщо  $\alpha = a/f$  і b = c = 0, то (10.13) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y}{x} \,. \tag{10.14}$$

Це рівняння має розв'язок

$$y = \gamma x^{\alpha} , \qquad (10.15)$$

де  $\gamma$  — стала інтегрування. Якщо  $\alpha > 0$ , то фіксована точка  $y = x = 0 \epsilon$  вузлом. Графічне зображення рівняння для  $\alpha = 1$  показано на рис. 10.1, *a*, розв'язком якого  $\epsilon$  коло (положення кола залежить від початкових умов), тобто простий гармонічний рух, а для  $\alpha = 2$  на рис. 10.1, *б* розв'язки наближаються до граничного циклу (розв'язки для початкових умов усередині граничної циклічної спіралі знаходяться поза нею, а розв'язки для початкових умов за граничною циклічною спіраллю знаходяться в ній), який не залежить від початкових умов. Якщо  $\alpha > 0$  і f < 0, то розв'язки сходяться в точку y = x = 0 і фіксована точка  $\epsilon$  стійким вузлом (рис. 10.2, *a*, *б*). Якщо  $\alpha > 0$  і f > 0, то розв'язки розходяться від точки y = x = 0 і фіксована точка  $\epsilon$  нестійким вузлом.

Якщо  $\alpha < 0$  у (10.14), і (10.15), то фіксована точка  $y = x = 0 \in$ сідловою точкою. Її поведінку для  $\alpha = -1$  зображено на рис. 10.2, *в*. Тільки сингулярні розв'язки y = 0 і x = 0 входять у фіксовану точку y = x = 0 або виходять з неї. Якщо x = 0, то

$$y = y_0 \exp(at) \tag{10.16}$$



РИС. 10.2. Поведінки сингулярної точки, *a* і б— вузлові точки, *в*— сідлова точка

і фіксована точка є стійкою для  $\alpha < 0$ . Якщо y = 0, то

$$x = x_0 \exp(ft) \tag{10.17}$$

і фіксована точка є стійкою для f < 0. Оскільки *a* і *f* мають протилежні знаки, то один сингулярний розв'язок буде стійким, а інший сингулярний розв'язок буде нестійким.

Після підстановки b = 1, c = -1,  $a = f = \alpha$  в рівняння (10.13), отримуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y}.$$
(10.18)

Перейдемо до полярних координат  $\rho$  і  $\theta$ , і виконаємо заміну змінних

$$x = \rho \cos \theta, \ y = \rho \sin \theta.$$
 (10.19)

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \alpha \rho . \tag{10.20}$$

 $3 \rho = \rho_0$  при  $\theta = 0$  після інтегрування отримуємо

$$\rho = \rho_0 \exp(\alpha \theta) . \tag{10.21}$$

Розв'язок (10.21) є логарифмічною спіраллю і фіксована точка в y = x = 0 у рівнянні (10.18) відома як спіраль.

Розв'язки, які виникають у нелінійних рівняннях, загалом приводять до серії біфуркацій, коли вони досягають хаотичної поведінки. Біфуркації відбуваються, якщо параметр системи ва-

ріюється. Розглянемо таке рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 , \qquad (10.22)$$

де  $\mu$  — параметр системи. Фіксовані точки цього рівняння, отримані при dx/dt = 0, є такі:

$$x = \pm \mu^{1/2} \,. \tag{10.23}$$

Коли  $\mu$  має від'ємне значення, то не існує дійсних фіксованих точок, а коли  $\mu$  має додатне значення, то існують дві дійсні фіксовані точки. Перехід при  $\mu = 0$  від випадку, коли розв'язків не існує, до випадку існування двох розв'язків, відомий як поворотна точка біфуркації. Оцінимо стійкість двох дійсних коренів, використавши лінеаризацію. У рівнянні (10.22) виконаємо підстановку:

$$x = \pm \mu^{1/2} + x_1. \tag{10.24}$$

Якщо не враховувати квадратичний член у x<sub>1</sub>, то отримуємо

$$\frac{dx_1}{dt} = \mp 2\mu^{1/2} x_1 \,. \tag{10.25}$$

Таким чином, фіксована точка  $x = \mu^{1/2}$  є стійкою: рішення, які розвиваються з часом, сходяться у цю точку. Фіксована точка  $x = -\mu^{1/2}$  є нестійкою: розв'язки, які розвиваються з часом, розходяться від цієї точки. Відповідна діаграма біфуркації зображена на рис. 10.3, *а*. Для  $x < -\mu^{1/2}$ , всі розв'язки сходяться до точки  $x = -\infty$ . Для  $-\mu^{1/2} < x < +\infty$ , всі розв'язки сходяться до стійкої фіксованої точки  $x = \mu^{1/2}$ .

Тепер розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - x^2), \qquad (10.26)$$

де  $\mu$  знову розглядається як параметр системи. Фіксовані точки цього рівняння, якщо dx/dt = 0, є такими:

$$x = \begin{cases} 0, \\ \pm \mu^{1/2}. \end{cases}$$
(10.27)

Коли  $\mu$  має від'ємне значення, то існує одна дійсна фіксована точка x = 0, а коли  $\mu$  має додатне значення, то існують три фіксовані точки  $x = 0, \pm \mu^{1/2}$ . Перехід при  $\mu = 0$  від випадку, коли



РИС. 10.3. Графік точки біфуркації при <br/>  $\mu$  = 0: a — поворотної;<br/>  $\delta$  — типу камертон

існує один розв'язок, до випадку існування трьох розв'язків називається біфуркацією типу камертон. Аналіз стійкості показує, що для  $\mu < 0$ , розв'язок x = 0 є стійким. Для  $\mu > 0$ , цей розв'язок є нестійким, але інші розв'язки є стійкими. Відповідна діаграма біфуркації подана на рис. 10.3, б. Для  $\mu < 0$  всі розв'язки сходяться до стійкої фіксованої точки x = 0. Для  $\mu > 0$  всі розв'язки для x > 0 сходяться до стійкої фіксованої точки  $x = \mu^{1/2}$ , і всі розв'язки для x < 0 сходяться до стійкої фіксованої точки  $x = -\mu^{1/2}$ .

Тепер розглянемо систему з такої пари рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma y + [\mu - (x^2 + y^2)]x, \qquad (10.28)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x + [\mu - (x^2 + y^2)]y . \qquad (10.29)$$

Підстановка в (10.28) і (10.29) із урахуванням полярних координат (10.19) приводить до таких рівнянь:

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma, \ \frac{d\rho}{dt} = \rho(\mu - \rho^2). \tag{10.30}$$

Ці рівняння мають розв'язки фіксованих точок  $\rho = 0$  (x = y = 0). Рівняння є стійким для  $\mu < 0$  і нестійким для  $\mu > 0$ . Для  $\mu > 0$  розв'язки (10.30) сходяться до колового граничного циклу, рівняння якого таке:

$$\rho = \mu^{1/2}.$$
 (10.31)



РИС. 10.4. Графік граничних розв'язків для різних значень  $\mu$  (біфуркація Гопфа при  $\mu = 0$ )

Ці розв'язки проілюстровано на рис. 10.4. Для  $\mu < 0$  розв'язки для  $\rho > \mu^{1/2}$  "по спіралі входять" у коловий граничний цикл, розв'язки для  $\rho < \mu^{1/2}$  "спіралять" за межі цього колового граничного циклу. Перехід від стійкої гілки для  $\mu < 0$  до стійкого граничного циклу для  $\mu > 0$  є так званою біфуркацією Гопфа. Рівняння Ван-дер-Поля підлягають біфуркації Гопфа при  $\varepsilon = 0$ . Розділ 11

# КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ У ФРАКТАЛЬНИХ СТРУКТУРАХ

У рамках цього наукового посібника ми не могли не розглянути хвильові процеси у фрактальних структурах, адже такі системи повинні мати визначену особливість зазначених процесів.

# 11.1. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ВУЗЛІВ ФРАКТАЛЬНИХ ҐРАТОК

Розглянемо найбільш простий хвильовий процес — механічні коливання вузлів фрактальних граток. У реальних матеріалах з фрактальною структурою дисперсійні відношення та вирази для густини коливальних станів випливають з масштабних залежностей модулів пружності та густини матеріалу.

Дослідження грунтуються на аналізі модельного рівняння коливань вузлів фрактальних граток. Це рівняння у найбільш простій моделі має вигляд

$$\alpha u_i = \sum_j K_{ij}(u_j - u_i), \qquad (11.1)$$

де  $K_{ij} = 1$ , коли зв'язок між вузлами цілий, та  $K_{ij} = 0$  у іншому випадку,  $\alpha$  — деяка розмірна стала, що має зміст оберненого квадрата частоти одиничного зв'язку.

Авжеж, це рівняння не може описувати коливання ґратки у випадку загальних сил пружності. Далі буде розглянута модель ізотропних сил пружності.

Класично, рівнянню (11.1) можна надати наступного фізичного змісту: у вузлах граток сконцентровані маси m, між собою вони з'єднані пружинами довжиною  $l_0$  пружністю k. Для звичайних матеріалів це є класична модель, усі її зв'язки цілі, для фрактальних кластерів це не так. Але цією моделлю користуються і отримують вірні результати.

Для кращого розуміння властивостей власних станів рівняння (11.1) розглянемо хвильовий процес на регулярному фракталі — трикутній серветці Серпінського (рис. 2.6). Для знаходження аналітичного розв'язку рівняння (11.1) у випадку самоподібних фрактальних граток застосуємо метод децимації.

Розглянемо рівняння (11.1) для коливань деякої частоти ω:

$$\alpha \omega^2 u_i = \sum_j K_{ij}(u_j - u_i) \,. \tag{11.2}$$

Нехай  $u'_{i}$ ,  $u_{i}$ , i = 1,2,3 — амплітуди коливань вузлів 1,2,3,1',2', 3'. Використовуючи частину рівняння (11.2), можна виразити амплітуди  $u'_{1',2',3'}$  з  $u_{1,2,3}$ . Якщо це використати у іншій частині, що містить у собі лише амплітуди  $u_{1,2,3}$ , попередньо зробивши заміну  $\alpha\omega'^{2} = 5\alpha\omega^{2} - 4\alpha\omega^{4}$ , то отримаємо систему рівнянь. У випадку самоподібності одержимо рівняння для амплітуд  $u_{1,2,3}$  коливання на гратці, що ідентична початковій.

У *п*-мірному випадку заміна має такий вигляд:

$$\alpha \omega'^2 = (n+3) \alpha \omega^2 - \alpha^2 \omega^4 . \qquad (11.3)$$

Зрозуміло, що процедуру децимації можна застосовувати рекурсивно.

Отже, маємо, що у випадку існування власних коливань з частотою  $\omega \in i$  власні коливання з частотою  $\omega'$ . При цьому кількість кластерів, що беруть участь у коливанні, змінюється у n + 1 разів, і для спектральної розмірності отримуємо наступний вираз:

$$d_f = \frac{2\ln(d+1)}{\ln(d+3)}.$$
 (11.4)

Структура спектра, що визначається заміною (11.3), достатньо складна та має властивість типу скейлінг на осі частот. Спектр складається з  $\delta$ -подібних піків, що створюють на осі частот складну самоподібну структуру. Вираз (11.4) вірний лише для усередненої за смугами частот густини станів.

Аналіз структури власних мод рівняння (11.2) на килимі Серпінського показав, що усі власні стани локалізовані і що їх існує два типи. Це молекулярні стани, у яких бере участь обмежена невелика кількість структурних елементів, і стани, амплітуди яких різні на всіх масштабах, але довжина локалізації визначена. Отже, на достатньо простому прикладі ми виявили суттєву особливість спектрів фрактальних структур — самоподібність, або властивість типу скейлінг, хоча це і є очікуваний результат, що виходить із масштабної інваріантності фізичних параметрів структури. Слід зазначити, що ці висновки поширюються і на інші більш складні види коливань у фрактальних структурах (наприклад, спінові хвилі), і навіть можна показати, що у загальному випадку спектр являє собою множину Кантора.

### 11.2. ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ У КВАЗІПЕРІОДИЧНИХ СТРУКТУРАХ

У попередньому параграфі ми розглядали використання методу децимації на мікроскопічному рівні, але для багатьох структур це дуже незручно. Метод децимації є універсальним, тому його можна застосовувати і для макроскопічного опису хвильових процесів у квазіперіодичних структурах. На початку треба визначитися з типом хвилі, отже з рівнянням її розповсюдження у тому чи іншому середовищі. Визначити скільки і яким чином розподілені різні складові структури.

Розглянемо на прикладі спінових хвиль у магнітостатичному наближенні застосування методу децимації на макроскопічному рівні. У нашому випадку квазіперіодична структура має вигляд неперіодичного розподілу шарів матеріалів з різними магнітними властивостями.

У магнітностатичному випадку ми використовуємо рівняння Максвелла (згасання відсутнє):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \ \nabla \times \vec{H} = 0, \tag{11.5}$$

де  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  пов'язані співвідношенням  $\vec{B} = \hat{\mu}\vec{H}$ ,  $\hat{\mu}$  — тензор магнітної сприйнятливості. Коливання намагнічування розглянемо як exp( $-i\omega t$ ), і тензор намагнічування  $\hat{\mu}$  має вигляд

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отримано, що для феромагнетика

$$\mu_1 = 1 + 4\pi \frac{\gamma^2 H_i M}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2}, \ \mu_2 = 4\pi \frac{\gamma^2 H_i M}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2}.$$

Тут  $H_i$  — внутрішнє магнітне поле, що має вигляд  $H_i = H_0 - 4\pi M$ , де  $H_0$  — зовнішнє магнітне поле, а M — намагнічення насичення,  $\gamma$  — гіромагнітне відношення.

3 рівняння (11.5), вводячи скалярний потенціал  $\phi$  через *H* як  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi$  і використовуючи (11.2), отримуємо вираз

$$\left[ \mu_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \! \varphi = 0 \; . \label{eq:mass_static_static}$$

Він дійсний як для магнітних, так і для немагнітних матеріалів (у другому випадку µ — одинична матриця). Розглянемо розв'язок у вигляді

$$\phi = \phi(z) \exp\{i(kx - \omega t)\},\$$

де *k* — хвильовий вектор у напрямку *x*, паралельному поверхні. Використовуючи (11.5), отримаємо

$$\left(-\mu_1k^2+\frac{d^2}{dz^2}\right)\phi(z)=0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд  $\phi(z) = A \exp(-\alpha z) + B \exp(-\alpha z)$ , де  $\alpha = (\mu_1)^{1/2}k$ . Нам необхідно зшити розв'язки у кожному шарі на межах, використовуючи умову неперервності  $\phi$  та  $d\phi/dz$ . Застосувавши ці умови до отриманих рівнянь, одержуємо дисперсійні співвідношення. Було з'ясовано, що для періодичних структур ми повинні розглядати діапазон частот, де  $\mu_1 < 0$ , що для феромагнетика дає  $|\gamma|H_i < \omega < |\gamma|\sqrt{H_iH_0}$ .

Розглянемо багатошарові квазіперіодичні структури. Нехай A — шар магнітного матеріалу товщиною  $d_A$ , B — немагнітного товщиною  $d_B$ . Властивості матеріалу A визначають  $\mu_1$  і  $\mu_2$ . Спочатку розглянемо метод децимації для періодичної надґратки, а далі узагальнимо його на квазіперіодичний випадок.

Для кожного шару матеріалу А розв'язок має вигляд

$$\phi(z) = A_{+} \exp(\alpha z) + A_{-} \exp(-\alpha z).$$

Нехай  $L = d_A + d_B -$ довжина одиничного блоку (періодичний випадок), застосуємо умови на межах для  $\varphi$ . Розв'язку рівняння можна надати вигляд, що має матрицю перетворення T:

$$\left|A^{n+1}\right\rangle = T\left|A^{n}\right\rangle,$$

де  $|A^{n+1}\rangle$  — двокомпонентний стовпець, що складається з амплітуд  $A_+$  и  $A_-$  в *n*-му блоці. Матриця перетворення може бути визначена як для періодичного, так і квазіперіодичного випадку. Квазіперіодичні блоки генерують надгратку за неперіодичним законом. Але навіть у цьому випадку може бути застосована теорема Блоха, тоді

$$\left|A^{n+1}\right\rangle = \exp(iQL)\left|A^{n}\right\rangle,$$

де Q — матеріальний хвильовий вектор (вектор Блоха) для нескінченної надґратки і визначення для L має бути узагальнене.

Розглянемо напівнескінченну надґратку, що знаходиться в області  $z \ge 0$ .

Було отримано, що

$$\cos(QL)=\frac{1}{2}Tr(T)\,,$$

для об'ємних, матеріальних, мод, але також можуть існувати поверхневі, комплексні, моди, що мають вигляд  $Q = i\beta L$ , для яких

$$\cosh(\beta L) = \frac{1}{2} Tr(T) \,.$$

Для поверхневих мод також справджуються граничні умови на поверхні z = 0. Це дає дисперсійні співвідношення у вигляді

$$T_{11} + \lambda^{-1}T_{12} = \exp\{-\beta L\} = T_{22} + \lambda T_{21},$$

де  $\lambda = (\alpha + \kappa)/(\alpha - \kappa)$  і  $\beta$  вибираються за умови Re( $\beta$ ) > 0.

Введемо величину  $x_j = 1/2 Tr(T_j)$ , де  $T_j$  визначає матрицю перетворення для *j*-ї генерації. Наприклад, для послідовності Фібоначчі  $x_j$  має рекурентний вигляд:

$$x_{j+1} = 2x_j x_{j-1} - x_{j-2} \, .$$

Цей вираз можна розуміти як 3*D* трасувальну карту, що можна побачити з перетворення:

$$\vec{r}_{j+1} = T\vec{r}_j = (2x_jy_j - z_j, x_j, y_j),$$

де  $\vec{r}_j$  — вектор, що має вигляд  $\vec{r}_j = (x_j, x_{j-1}, x_{j-2}) = (x_j, y_j, z_j)$ . Виходячи з цього і знаходиться дисперсійне співвідношення.

Як можна побачити з прикладу спінових хвиль, метод децимації дуже гнучкий та дієвий і може бути використаний для дослідження хвильових процесів будь-якої природи у квазіперіодичних структурах. Найбільш важкий момент полягає у визначенні матриці перетворення, але це лише технічний момент. АСТРОФІЗИКА

Розділ 12-

# 12.1. ВЕЛИКОМАСШТАБНА СТРУКТУРА ВСЕСВІТУ ТА ФРАКТАЛЬНІ КОНЦЕПЦІЇ

Перш ніж проаналізувати застосування фракталів для опису розподілу галактик у Всесвіті, нагадаємо, чим обумовлена його великомасштабна структура. Лише близько 5% галактик є ізольованими зоряними системами, — більшість галактик входить до груп (кількістю від двох до декількох десятків членів) або скупчень (до декількох тисяч членів). Розміри груп та скупчень становлять від сотень тисяч до десятків мільйонів світлових років. Прикладом такого утворення є Місцева група галактик, до якої входить наша Галактика Молочний Шлях, Велика і Мала Магелланові Хмари, туманність Андромеди, туманність Трикутника та інші галактики, — загалом близько 40 членів групи. Одним із найбільших скупчень (до 40 тис. галактик) є скупчення у напрямку сузір'я Волосся Вероніки, яке знаходиться на відстані 400 млн світлових років. Скупчення галактик, дрібні групи та поодинокі галактики входять до ще більших угруповань — надскупчень, які мають сплющену форму чи являють собою витягнуті ланцюгові структури довжиною декілька десятків мільйонів світлових років. Зокрема, Місцева група галактик входить до Місцевого надскупчення. Просторовий розподіл галактик, їх груп, скупчень та надскупчень і обумовлює великомасштабну структуру Всесвіту, обрис якої нагадує коміркову: галактики розташовані на межі комірок у скупченнях, які формують надскупчення, а мережа надскупчень оточує велетенські області, які практично не містять у собі галактик. Порожнини мають такі ж розміри, як і надскупчення галактик.

# 12.1.1. Кореляційна функція розподілу галактик і фрактальна розмірність

Упродовж 80-х років минулого століття багатьма авторами на різних вибірках каталогів галактик і їхніх скупчень, за різними методиками розрахунку просторової та кутової кореляційних функцій з урахуванням систематичних похибок вимірювань відстаней до галактик було показано, що кореляційна довжина розподілу галактик дорівнює  $r_{\text{гал}-\text{гал}} = 5h^{-1}$  Мпк, а скупчень галактик  $r_{\text{ск}-\text{ск}} = 25h^{-1}$  Мпк (тут h = H/100, де H — стала Габбла, прийняте значення якої зараз H = 75 км/(с · Мпк)).

Кореляційну функцію можна визначити так:

$$\xi(r) = \frac{\left\langle \boldsymbol{n}(\vec{r_0})\boldsymbol{n}(\vec{r_0} + \vec{r})\right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{n}\right\rangle^2} - 1, \qquad (12.1)$$

де  $n(\vec{r})$  — щільність галактик у певній вибірці,  $\vec{r}_0$  — кореляційна довжина, на якій кореляційна функція  $\xi = 1$ . Якщо  $\xi >> 1$ , то розподіл галактик корельований, якщо  $\xi << 1$ , то розподіл слабко корельований. Важливо підкреслити, що відповідно до кореляційного аналізу розподіл стає суттєво однорідним для  $\xi >> 1$ , тобто надскупчення або пустоти у розподілі галактик знаходяться значно далі, ніж кореляційна довжина.

У 1987 р. у працях з безпосередніх розрахунків каталогів галактик було отримано, що кореляційна функція розподілу галактик має дробову степеневу залежність (див., зокрема, [7]):

$$\xi(r) \cong Ar^{-\gamma} \quad (A = \text{const}), \qquad (12.2)$$

де показник степеня  $\gamma = 1,7$ .

Кореляційна функція може бути також визначена як перетворення фур'є-спектра флуктуації щільності:

$$\xi(r) = 4\pi \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} P(k) \frac{\sin(2\pi kr)}{2\pi kr} k^2 dk , \qquad (12.3)$$

де k — номер хвилі, виражений у таких одиницях, що  $k_{\min} = 1$ відповідає довжині L сторони даного кубічного об'єму простору, а  $k_{\max}$  — найбільший номер хвилі для даної вибірки, відстань rвиражена в одиницях довжини L сторони куба. На практиці доточкова кореляційна функція визначається у термінах ймовірності того, що усередині даної вибірки об'єктів із середньою щільністю n, об'єкти із будь-якої пари можуть бути незалежно виявлені усередині елементарних об'ємів  $\delta V_1$  та  $\delta V_2$  на відстані rодин від одного (у випадку великомасштабного розподілу галактик апріорі спрацьовує твердження, що так званий космологічний принцип не порушується):

$$\delta P_2 = n^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(r)]. \tag{12.4}$$

Якщо розподіл є пуассонівським, тоді

$$δP_2 = n^2 δV_1 δV_2$$
 і відповідно  $ξ(r) = 0,$  (12.5)

тобто кореляційна функція описує відхилення від пуассонівського розподілу. Якщо галактики скупчуються у більші системи, то  $\xi(r)$  буде позитивною для r менших ніж розмір системи, і  $\xi(r)$ буде від'ємною для r, більших ніж розмір системи.

Пояснимо це. Фактично кореляційна функція визначається як відношення кількості пар галактик на даній відстані *r* до відповідної кількості галактик для пуассонівської вибірки, яка вміщує таку саму кількість галактик. Оскільки галактики у загальному великомасштабному розподілі, як щойно згадувалося, знаходяться переважно на межах комірок у скупченнях, то вони заповнюють лише малу частину загального простору. Очевидно, що у пуассонівській вибірці галактики рівномірно заповнили б загальний простір. Тому, чим менший коефіцієнт заповнення у реальній вибірці, тим більше переповнення кількості галактик у заповнених областях вибірки відносно сумарної середньої щільності розподілу [48].

У праці Мандельброта показано, що фрактальна розмірність розподілу мас об'єктів D = 1,2 (12.7) виведена зі степеневого закону (12.2). Питання: "чому ця розмірність набагато менша за розмірність простору" викликало серію праць, на деяких висновках з яких ми зупинимося детальніше. Але спочатку покажемо, як за допомогою кореляційної функції — однієї з фундаментальних статистичних величин — можна отримати фрактальну розмірність.

Ще раз підкреслимо, що не існує іншої масштабно-інваріантної функції, крім степеневої функції (параграф 1.2). Тобто, певна функція  $\varphi(x)$  є масштабно-інваріантною, якщо для всіх  $\lambda$  вона пропорційна масштабній функції  $\varphi(\lambda x)$ . Це означає, що існує функція  $\Phi(\lambda)$ , для якої

$$f(x) = \Phi(\lambda) \cdot f(\lambda x) . \qquad (12.6)$$

Після диференціювання і виключення  $\Phi(\lambda)$  одержуємо функціональне рівняння  $f'(x) / f(x) = \lambda f'(\lambda x) / f(\lambda x)$ . А після підстановки x = 1 та інтегрування по  $\lambda$  маємо

$$f(x) = f(1)x^{\gamma}, \ \gamma = f'(1) / f(1)^{\gamma}.$$

Це досить важливе твердження з огляду на те, що в теоретичних моделях експоненціальні функції типу  $\exp(-r/r_0)$  або гауссіани  $\exp(-r^2/r_0^2)$  часто використовуються як кореляційні функції. При цьому вони не мають фрактальних властивостей, оскільки містять у собі певну характеристичну довжину  $r_0$ . Це означає, що кореляція між двома точками згасає досить швидко, як тільки  $r \ge r_0$ .

Нехай для деякої випадково розподіленої у просторі величини функція  $\rho(x)$  визначає щільність цієї величини в точці x. Тоді кореляційна функція  $\xi(r) = \langle \rho(x)\rho(x+r) \rangle$ , зокрема, у випадку однорідного та ізотропного розподілу кореляційна функція перетворюється у функцію відстані r між двома точками. У випадку фрактального розподілу, який описується масштабно-інваріантним степеневим законом, темп згасання кореляції завжди постійний. Тобто, для функції (12.2)  $\xi(r) \approx r^{-\gamma}$  кореляція зменшується у  $2^{-\gamma}$  разів зі збільшенням відстані між двома точками удвічі. Співвідношення для фрактальної розмірності і показника степеня кореляційної функції визначається як  $D = d - \gamma$ , де d розмірність простору. Використавши означення кореляційної функції (12.2)—(12.2), це можна довести із розгляду функції розподілу мас  $M(r) \approx r^{D}$ :

$$M(r) = \int_{|x| < r} \int dx \xi(x) / P(0) \propto \int_{0}^{r} X^{d-1} X^{-\gamma} dx \propto r^{d-\gamma}.$$
 (12.7)

Зауважимо, що саме ця фрактальна розмірність розподілу мас D = 1,2 була отримана у працях [64, 34], дивись також Луккин в книзі [85].

У випадку силового спектра, фур'є-перетворення на основі (12.3) та з урахуванням (12.2) також випливає степеневий закон, коли  $0 \le d - D \le 1$ :

$$P(k) = 4 \int_{0}^{\infty} dr \cos(2\pi kr) \xi(r) \propto k^{d-D-1} .$$
 (12.8)

Використовуючи залежність (12.8), можна отримати фрактальну розмірність із силового спектра, при цьому величину P(k) одержимо безпосередньо з експериментів.

Зупинимося на деяких важливих аспектах зв'язку кореляційної функції, фрактальної розмірності та властивостей великомасштабного розподілу галактик. Дані, приведені на початку п. 12.1.1, свідчать, що якщо показник степеня  $\gamma = 1,7$  як для розподілу галактик, так і для скупчень галактик, то стала *А* кореляційної функції для галактик дорівнює  $A_{ran} \approx 20$ , для скупчень  $A_{cкуn} \approx 360$ , а для надскупчень  $A_{надскуn} \approx 1000-1500$ . Це означає принаймні, що  $A_{скуn} \approx 18A_{ran}$ , тобто скупчення галактик, які складаються переважно з галактик, і відповідно надскупчення корелюють більше, ніж безпосередньо галактики. Зауважимо, що розподіл речовини у Всесвіті неоднорідний на малих масштабах, виявляє однорідний характер, якщо його усереднити за комірками простору розміром 100 Мпк.

Нагадаємо середні значення розмірів і мас угруповань, які обумовлюють великомасштабну структуру Всесвіту і можуть бути одним із найбільших прикладів фракталів у природі.

Діапазон мас для галактик становить  $10^7 - 10^{12}$  мас Сонця, розмірів — від 10 до 100 кпк (1 парсек = 3,0857 ·  $10^{16}$  м = 3,2 світлових років; маса Сонця — 2 ·  $10^{33}$  г). Щільність розподілу галактик у просторі перевищує до  $10^5$  середню, а їх розподіл у спостережуваному Всесвіті є ізотропним, якщо усереднити за комірками розміром  $r_{\rm H} = c/H_0 = 300h^{-1}$  Мпк (де  $H_0 = 100 h$  і у термінах часу Всесвіту становить  $1/H_0 = 10^{10}$  років; середня густина речовини у Всесвіті у сучасну епоху  $\rho_0 = 1,88 \cdot 10^{-29}\Omega_0 h^2$  г/см<sup>3</sup>, де  $\Omega_0$  параметр густини  $0,03 \le \Omega_0 \le 1$ ).

Діапазон мас для груп галактик становить  $10^{12}-10^{14}$  мас Сонця, розмірів — від 0,1 до 10 Мпк, перевищення середньої щільності розподілу груп галактик у просторі над середньою становить до  $10^3$ . Скупчення галактик у середньому мають масу  $10^{15}$  мас Сонця, розміри — порядку 10 Мпк і більше, перевищення середньої щільності розподілу скупчень у просторі над середньою у  $10^2$  та більше. Маса надскупчень становить від  $10^{17}$  мас Сонця, розміри — порядку 10 Мпк і більше, перевищення середньої щільності розподілу скупчень у просторі над середньою у  $10^2$  та більше. Маса надскупчень становить від  $10^{17}$  мас Сонця, розміри — порядку 100 Мпк і більше, перевищення середньої щільності розподілу надскупчень у просторі над середньою — приблизно у 2-3 рази. Найвідоміша з гігантських порожнин у напрямку сузір'я Волопаса має розміри близько 100 Мпк.

Отже, діапазон значень цих структур за розмірами становить принаймні 4 порядки, а за масами — 10 порядків.

Оскільки через об'єктивні причини неможливо обрахувати розподіл всіх спостережуваних галактик (у першу чергу, через відсутність повної репрезентативності такої вибірки на далеких відстанях), то для застосування геометричних методів аналізу розподілу галактик зазвичай вибирають різноманітні каталоги галактик. Тут виникає проблема розміру  $R_{\text{вибірки}}$  такої вибірки, особливо, коли цей параметр більший за певну довжину  $\lambda_0$ , яка відповідає однорідному розподілу. Для пояснення доречно на-

вести аналогію з рідиною, для опису якої вперше була застосована двоточкова кореляційна функція: досліджуваний об'єм рідини завжди містить у собі достатню кількість молекул, наприклад води, і їхня середня щільність адекватно описує властивості цієї рідини, а кореляційна функція буде однаковою і для склянки води, і для океану, тому що описує лише фізичні властивості води без відношення до розмірів склянки. У випадку розподілу галактик певною мірою лише функція  $n(\vec{r}) = N/V$  враховує розміри досліджуваної вибірки, а відповідна щільність умовного розподілу галактик має вигляд:

$$\Gamma(r) = \frac{\langle n(\vec{r_0})n(\vec{r_0} + \vec{r})\rangle}{\langle n \rangle}.$$
 (12.9)

З урахуванням  $n(\vec{r}) = N/V$  та означення середньої кількості галактик, отримуємо

$$\Gamma(r) = \frac{1}{N_V} \int_V n(\vec{r_0}) n(\vec{r_0} + \vec{r}) dV . \qquad (12.10)$$

Оскільки  $n(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ , тоді рівняння (12.10) (у припу-

щенні, що всім точкам приписується одинична маса) можна перезаписати у такий спосіб, щоб уникнути розміри досліджуваної вибірки у явному вигляді:

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n(\vec{r}_i + \vec{r}) = \langle n(\vec{r}_i + \vec{r}) \rangle_i. \qquad (12.11)$$

Інтегральна щільність умовного розподілу, тобто кількість галактик усередині сферичної області радіусом *r*, має вигляд

$$I(r) = 4\pi \int_{0}^{r} r'^{2} \Gamma(r') dr' . \qquad (12.12)$$

Щільність умовного розподілу пов'язана з кореляційною функцією (12.1) очевидним співвідношенням

$$\xi(r) = \frac{\Gamma(r)}{\langle n \rangle} - 1.$$

Каталог галактик CfA, створений наприкінці 80-х років минулого століття, став одним із перших, де було наглядно наведено ЧАСТИНА 2. Застосування фракталів у математиці, фізиці і астрофізиці



РИС. 12.1. Розподіл 12 434 галактик у просторі на основі даних огляду червоних зміщень галактик (*The Las Campanas Redshift Survey*)

комірчасту структуру великомасштабного розподілу галактик (на рис. 12.1 подано розподіл 12 434 галактик у просторі на основі даних більш сучасного огляду американської астрономічної обсерваторії Лас-Кампанес, Чілі (лас-кампанесовський огляд червоних зміщень галактик). Як радіальна координата тут прийнята променева швидкість галактики, за законом Габбла пропорційна її відстані від нас. Використовуючи каталог CfA для розрахунку кореляційної довжини  $\xi(r)$ , щільності умовного розподілу  $\Gamma(r)$  і

усередненої щільності умовного розподілу  $\Gamma'(r) = \frac{1}{V} \int_{C} \Gamma(r) dV$  га-

лактик, було показано [8] зв'язок цих величин із фрактальною розмірністю (рис. 12.2): функції  $\xi(r)$ ,  $\Gamma(r)$  мають чіткий степеневий характер, що відповідає фрактальному розподілу з показником степеня  $\gamma = -1,7$ . Розподіл є суттєво неоднорідним, а функції  $\xi(r)$ ,  $\Gamma(r)$  мають чіткий степеневий характер, що відповідає фрактальному розподілу (штрихова лінія має нахил  $\gamma = -1,7$ ) [8] з  $D = 1,4 \pm 0,1$ .



РИС. 12.2. Функції  $\xi(r)$ ,  $\Gamma(r)$  і  $\Gamma'(r)$  масштабної довжини розподілу галактик із каталогу CfA

# 12.1.2. Моно- і мультифрактальна моделі розподілу галактик

Вперше фрактальна модель (ієрархічна) для опису розподілу галактик була запропонована італійськими фізиками Колеманом і П'єтронеро (див. [7, 23]). Розглянемо її.

Нехай усередині певного об'єму з радіусом  $d_0$  знаходяться  $N_0$  галактик. Тоді усередині об'єму з радіусом  $d_1 = kd_0$  знаходяться  $N_1 = \bar{k}N_0$  об'єктів. Узагальнюючи, отримуємо рівняння, що відповідають неперервній границі дискретних масштабних співвідношень:

$$d_n = k^n d_0, \ N_n = \overline{k}^n N_0, \ N(d) = \sigma d^D.$$
 (12.13)

Фрактальною розмірністю слугує величина, яка залежить тільки від масштабних параметрів:

$$D = \frac{\log \overline{k}}{\log k}, \quad \sigma = \frac{N_0}{d_0^D}.$$
 (12.14)

Нехай у певній вибірці галактик з радіусом  $R_{\text{вибірки}}$  присутня частина, яка має фрактальний розподіл, а її об'єм визначається як  $V(R_{\text{вибірки}}) = \frac{4}{3} \pi (R_{\text{вибірки}})^3$ . З урахуванням (12.13) для середньої шільності галактик запишемо:

$$\langle n \rangle = N(R_{\text{вибірки}})/V(R_{\text{вибірки}}) = \frac{3\sigma}{4\pi} (R_{\text{вибірки}})^{-\gamma}, \ \gamma = 3 - D.$$
 (12.15)

Враховуючи дискусію, наведену в п. 12.1.1, бачимо, що середня щільність розподілу неадекватно описує властивості цієї вибірки, оскільки залежить від її розміру. Використання функції щільності умовного розподілу (12.9)—(12.11) дозволяє уникнути цієї проблеми:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{S(r)} \frac{dN(r)}{dr} = \frac{\sigma D}{4\pi} r^{-\gamma}, \qquad (12.16)$$

де S(r) — площа сферичного прошарку з радіусом r. З рівнянь (12.16), (12.1), (12.14) отримуємо вираз для кореляційної функції:

$$\xi(r) = \left(\frac{3-\gamma}{3}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^{-\gamma} - 1.$$
 (12.17)

Отже, на відміну від функції щільності умовного розподілу (2.16), кореляційна функція (2.17) залежить від розміру вибірки. Тобто, у випадку фрактальної системи вибірки кореляційна функція "приховує" фізичні властивості вибірки через граничні умови вибірки (каталога). Для кореляційної довжини  $r_0$  у точці, де  $\xi(r) = 1$ , отримуємо

$$r_0 = \left(\frac{3-\gamma}{6}\right)^{1/\gamma} R_{\text{вибірки}}.$$
 (12.18)

У точці, де  $\xi(r) = 0$ , маємо

$$r_0' = \left(\frac{3-\gamma}{3}\right)^{1/\gamma} R_{\text{вибірки}}.$$
 (12.19)

Для  $r > r'_0$  значення кореляційної довжини від'ємне, а для

206

 $r << r_0$ або  $r << R_{вибірки}$  має степеневий характер вигляду (12.2)  $\xi(r) \cong Ar^{-\gamma}$ , де A — функція  $R_{вибірки}$ . Тобто,  $A(R_{вибірки}) = \left(\frac{3-\gamma}{3}\right) \times$ 

×  $(R_{\text{вибірки}})^{\gamma}$ , а саме (п. 12.1.1). У випадку розподілу галактик і розподілу скупчень з вибірок, відповідно розміром  $R_{\text{гал}}$  і  $R_{\text{скуп}}$ , отримуємо, що  $A(R_{\text{гал}}) = \left(\frac{3-\gamma}{3}\right)(R_{\text{гал}})^{\gamma}$  та  $A(R_{\text{скуп}}) = \left(\frac{3-\gamma}{3}\right)(R_{\text{скуп}})^{\gamma}$ .

З огляду на масштабну інваріантність (12.6) і припущення самоподібності розподілу галактик і скупчень. У випадку існування фрактальної структури ці амплітуди повинні співвідноситися як  $A(R_{\text{скуп}})/A(R_{\text{гал}}) = (R_{\text{скуп}}/R_{\text{гал}})^{\gamma}$ . Підставляючи  $\gamma = 1,7-1,8$  і враховуючи, що кореляційні довжини за розрахунками каталогів галактик і скупчень галактик співвідносяться як  $r_{\text{гал}-\text{гал}} = 5h^{-1}$  Мпк і  $r_{\text{ск-ск}} = 25h^{-1}$  Мпк, тобто  $R_{\text{скуп}} \approx 5R_{\text{гал}}$ , отримуємо, що  $A(R_{\text{скуп}})/A(R_{\text{гал}}) \approx 16 - 18$ .

Це означає, що кореляції в розподілі скупчень галактик є продовженням кореляції розподілу галактик на більших масштабах, а різниця в амплітудах кореляційних функцій означає, що ми аналізуємо розподіли на різних глибинах вибірки. Формула (12.2) була отримана емпіричним шляхом, що дало змогу оцінити фрактальну розмірність розподілу галактик на малих масштабах ( $D \approx 1,3$ ), і на великих масштабах ( $D \approx 2$ ).

Отже, застосування фрактальних концепцій дозволило надати додаткові аргументовані висновки щодо проблеми узгодження основних кореляцій, які спостерігаються у розподілі угруповань великомасштабної структури Всесвіту.

Одним із недоліків такого типу монофрактальних моделей є неврахування розподілу мас галактик, діапазон значень яких (п. 12.1.1) сягає принаймні 6 порядків. Якщо припустити, що розподілу мас галактик властива самоподібність, то доречніше скористатися мультифрактальним формалізмом, який пропонує неперервний спектр показників степенів (на відміну від одного показника степеня у випадку монофрактала) для характеристики системи (розділ 5). Це означає, що масштабні властивості системи можуть розрізнятися для різних областей системи, кожній з яких властива самоподібність.

Отже, якщо розподіл галактик описати за допомогою функції щільності

$$p(r) = \sum_{i=1}^{N} m_i \delta(r - r_i) , \qquad (12.20)$$

де  $m_i$  — маса *i*-ї галактики, то, застосовуючи метод підрахунків комірок на фрактальній множині, можна отримати вираз для показника  $\alpha(\xi)$  Ліпшица—Гьольдера (5.8)—(5.9).

$$\mu_{\xi} = \delta^{\alpha}, \quad \alpha(\xi) = \frac{\ln \mu_{\xi}}{\ln \delta} = -\frac{\xi \ln p + (1 - \xi) \ln(1 - p)}{\ln 2}.$$

При цьому, якщо *i*-а комірка має сингулярність типу  $\alpha(\xi)$  в сенсі рівняння (5.2), то набір цих сингулярностей можна визначити (рис. 5.1) фрактальною розмірністю  $f(\alpha)$ , особливості якої мають вигляд (5.10)—(5.11). Система рівнянь для фрактальної розмірності, враховуючи вирази для повної міри (5.12)—(5.15), має вигляд (5.17):

$$\begin{cases} \alpha(q) = -\frac{d}{dq} \tau(q), \\ f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q), \end{cases}$$

де показник маси пов'язаний зі спектром фрактальних розмірностей як (5.18):

$$D(q)=\frac{\tau(q)}{q-1}\,.$$

Маса галактик пов'язана зі світністю галактик як  $M = g_i L^{\beta}$ , де  $g_i$  — так зване відношення маса—світність M/L, яке залежить від морфологічного типу *i* галактики. Для більшості моделей припускається, що M/L = const, тобто  $\beta = 1$ . Тоді для нормованого розподілу мас з урахуванням (12.20) можна виключити множник  $g_i$ :

$$\mu(r) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \delta(r - r_i), \ \mu_i = m_i / \sum_{i=1}^{N} m_i.$$
 (12.21)

Така мультифрактальна модель була застосована для каталогу CfA галактик (див., зокрема, [7]), а саме, для різних значень параметрів *q* та δ була розрахована функція  $N(q,\delta)$  на різноманітних масштабах розподілу за процедурою, описаною в розділі 5. За найменші масштаби було вибрано величину, що дорівнює 1/4 типової довжини пуассонівського розподілу  $\lambda_0 = 0.55 \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$  для N галактик в об'ємі V, а за величину б було вибрано величину ( $\sqrt{2}q$ ) для урахування граничного радіуса вибірки і комірок, які



РИС. 12.3. Функція  $N(q = 0, \delta)$  розподілу галактик каталогу CfA (мультифрактальна модель). Чорні точки центральної області графіка свідчать про скейлінгові властивості вибірки і степеневу поведінку функції [7]

містять на межах принаймні одну галактику. Поведінка отриманої функції  $N(q = 0,\delta)$  показана на рис. 12.3, де саме, центральна область є найбільш інформативною: чорні точки свідчать про масштабні (скейлінгові) властивості вибірки і степеневу поведінку функції (5.16):

$$\tau(q=0) = -D(q=0), \ D(0) = 1,5 \pm 0,1.$$
 (12.22)

У випадку q = 0 очевидно, що не враховується діапазон значень мас галактик, і кожна точка має однакову вагу. З точки зору мультифрактальної концепції кореляційна функція відповідає випадку D(q = 2), коли застосовується метод підрахунків комірок з розподілом мас (12.21). Метод кореляційної функції (п. 12.1.1) для вибірки галактик, де не враховуються маси (монофрактал), відповідає фрактальній розмірності  $D = 1.4 \pm 0.1$  (рис. 12.2). Отже, наведений вище результат (12.22) свідчить саме на користь мультифрактальних властивостей розподілу галактик. Оскільки маси галактик і відношення "маса-світність" відіграють головну роль у динаміці систем, то і для мультифрактального спектра вони є суттєвими. А саме, у випадку  $N(q = 2, \delta)$  нахил функції відповідає  $\tau(2) = D(2) = 1,3 \pm 0,1$ , для інформативної розмірності  $D(1) = 1.5 \pm 0.1$ . Відповідний графік поведінки мультифрактального спектра розмірностей розподілу галактик каталогу CfA подано на рис. 12.4 [7]. Найбільші сингулярності розподілу мас відповідають  $\alpha_{\min} = 0.68$  і фрактальній розмірності  $f(\alpha_{\min}) = 0$ .

ЧАСТИНА 2. Застосування фракталів у математиці, фізиці і астрофізиці



РИС. 12.4. Мультифрактальний спектр розподілу галактик каталогу CfA

Для правої сторони графіка величина *q* має від'ємні значення, що унеможливлює розрахунки [7].

### 12.2. ФРАКТАЛЬНА СТРУКТУРА ГІГАНТСЬКИХ МОЛЕКУЛЯРНИХ ХМАР

Головною складовою міжзоряного середовища є велетенські газові хмари (типовий розмір порядку 150 світлових років), які містять у собі переважно водень у атомарному або молекулярному стані. Газові хмари є самогравітаційні системи, при цьому молекулярні хмари більш "грудкуваті", щільніші ( $10^6$ —  $10^{10}$  частинок/см<sup>-3</sup>) і холодніші (10-20 K), ніж атомарні. Завдяки таким фізичним умовам у молекулярних хмарах відбуваються процеси народження зір як планетних систем, а спостерігати їх можна в інфрачервоному або в радіодекаметровому діапазоні електромагнітних хвиль.

Прикладом такого комплексу є гігантська молекулярна хмара в нашій Галактиці — Молочний Шлях, — її розмір близько 100 пк, а маса близько мільйона мас Сонця. Вважається, що ці значення є критичними, оскільки більші утворення будуть руйнуватися приливною взаємодією з Галактикою. Найменші утворення молекулярних хмар, які спостерігаються за допомогою сучасних телескопів, мають розмір близько  $10^{-4}$  пк (10—20 а. о.), масу в одну тисячну маси Сонця, а густину близько  $10^{10}$  см<sup>-3</sup>. Таким чином, для молекулярних хмар діапазон значень за розмірами сягає 6 порядків, а за масами — 9 порядків. Просторова роздільна здатність телескопів не дозволяє побачити структуру молекулярних хмар в цілому, більше ніж декілька порядків за розмірами. Проте порівняння структури хмар, розташованих на різних відстанях від нас як у нашій Галактиці, так і в інших, свідчить про

210



РИС. 12.5. Туманність Оріона. Зображення отримане за допомогою 8,3-метрового телескопа Субару (Національна астрономічна обсерваторія Японії)

їх самоподібність і можливість описати їх розподіли розмірів і мас степеневими законами.

На рис. 12.5 подано фотографію однієї з таких гігантських молекулярних хмар — туманності Оріона, розташованої в одному із спіральних рукавів Молочного Шляху на відстані 1500 світлових років від Землі.

Виявилося [9], що ці гігантські фізичні комплекси можна описати за допомогою фрактальних концепцій. Більш того, вони є чи не найбільшим фракталом у Всесвіті (за діапазоном значень розмірів і мас), навіть більшим ніж розподіл галактик. Зауважимо, що ці обидва астрофізичні фрактали самоподібні лише в межах певних граничних умов, які накладаються об'ємом вибірки або каталогів (параграф 12.1), самоподібність хмар також розривається природно в областях зореутворення. Істинний фрактал не має меж, тобто самоподібність і молекулярних хмар, і розподілу галактик може розглядатися лише у статистичному сенсі.

Оскільки молекулярний водень через свою симетрію і відсутність дипольного моменту не випромінює при температурах 10—

15 К, то найкращими мітками структури хмар виявляються наступні за частотою присутності у хмарах молекули СО ( $n_{\rm CO}$  /  $n_{h_2} = 10^{-4}$ ). За шириною їх спектральних ліній, а значить, і дисперсією швидкостей о визначають розміри за формулою:  $\sigma \propto r^q$ , де параметр q = 0, 3...0, 5.

Розмірність Хаусдорфа—Безіковича визначає, чи є система однорідною і яка частина простору заповнена об'єктами цієї системи. У випадку тривимірної системи з однорідною густиною ії маса зростає пропорційно  $r^3$ . Якщо система є фракталом, вона займає лише невелику частину простору, а маса, зосереджена у межах простору розміром r, зростає за законом (12.7) як  $M \propto r^{\rho}$ , де розмірність Хаусдорфа—Безіковича менша за 3. Зокрема, фрактальна розмірність гігантських молекулярних хмар порядку D = 1,7...2,0. Важливо зауважити, що середня густина в межах певного радіуса r зменшується пропорційно  $1/r^{\alpha}$ , де  $\alpha = 1,0...1,4$ . На рис. 12.6 подано залежності дисперсії швидкості (км/с) і ма-



РИС. 12.6. Степеневі залежності дисперсії швидкостей (*a*) (км/с), q = 0,5 і маси молекулярного водню (б) від розміру. (пк), D = 2

си (в одиницях маси Сонця) від розміру (пк), наведені в [9] за даними різних авторів.

Важливо зауважити, що фрактальна розмірність для молекулярних хмар розраховується на основі "контурних" двовимірних розподілів, які є проекціями їх тривимірної структури, наприклад, за контурами розподілу молекули СО, контурами розподілу на певній довжині хвилі електромагнітного випромінювання, за неперервним спектром і т. ін. У цьому випадку проекція фрактальної розмірності може не бути фракталом [12], і відтворити значення фрактальної розмірності у тривимірному просторі можна лише тоді, коли отримана проективна фатальна розмірність  $D_P = D$  для  $D \le 2$ , або  $D_P = 2$  для  $D \ge 2$ . Це означає, що для розрахунку можна застосовувати метод покривних комірок "периметр—площа" (розділ 3). Периметр P і площа A пов'язані з фрактальною розмірністю  $D_2$  (нижній індекс позначає розмірність простору) таким співвідношенням:

$$P \propto A^{D_2/2}.$$

Було отримано, що  $D_2 = 1,36$  за контурами розподілу молекули СО як для великих площ у декілька кутових градусів, так і малих у декілька кутових хвилин; подібні значення  $D_2 = 1,3...1,5$ було отримано і для фрактальної розмірності хмар атомарного водню.

### 12.3. ФРАКТАЛИ У СОНЯЧНІЙ СИСТЕМІ

Досить грунтовно застосування фрактальних концепцій для опису основних явищ на Сонці — сонячної активності, спалахів і корональних викидів мас, структурних особливостей сонячних плям і великомасштабних магнітних полів — подано в монографії Е.İ. Могилевського [65]. У цій праці розглянуто системи фрактально-кластерних структур на Сонці і структурної стійкості фрактальних середовищ, поняття синергетики і солітони, які допомагають зняти певні протиріччя, які виникають у зв'язку із застосуванням традиційних моделей магнітогідродинаміки неперервних середовищ. Зацікавленим читачам пропонуємо прочитати цю книгу і праці, які цитуються там, особливо щодо фрактального аналізу вихорної структури магнітного поля на Сонці, де застосування фрактальної геометрії стало широкоуживаним.

# 12.3.1. Кільця Сатурна

Планета Сатурн має найпотужнішу серед планет плоску екваторіальну систему кілець, які складаються з рою частинок розмірами від пилинок до декаметрових глиб. У свій час математики Лаплас, Максвелл, Ковалевська і Боль показали, що ця система не може бути суцільним твердим тілом. Пізніше з'ясувалося, що існують процеси, які синхронізують рух частинок (виключають зіткнення та підтримують близькоколові траєкторії); кільце є стійким комплексом; існують джерела поповнення речовини в кільцях. Спостереження за допомогою наземних телескопів дають змогу вирізнити насамперед три потужні, на перший погляд "однорідні" смуги у структурі кілець цієї планети (кільця А, В, С та щілина Кассіні між кільцями А і В). Завдяки місії космічних апаратів НАСА "Вояжер-1, 2" у 1980—1981 рр. вдалося отримати знімки і виявити тонку структуру кілець Сатурна. На рис. 12.7 бачимо, що кільця Сатурна складаються з сотень окремих вузьких кілець, розділених вузькими щілинами. Ширина кільцевої системи становить 65 000 км, а товщина не перевищує 1 км. Найбільша щілина Кассіні — широка темна смуга на фотографії — має розмір 3500 км і є зоною орбіт, у якій період обертання кожної частинки навколо Сатурна рівно вдвічі менший, ніж у найближчого великого супутника Сатурна — Мімаса. Завдяки цьому резонансу Мімас своїм притяганням начебто розгойдує частинки, що рухаються усередині розподілу, і зрештою викидає їх звідтіля. Крім трьох кілець (С. В. А), види-



РИС. 12.7. Система кілець Сатурна (за даними КА "Вояжер-1" і "Вояжер-2")
мих у наземні телескопи, "Вояжери" відкрили ще чотири. Порядок позначення кілець сформувався історично, тому він не збігається з алфавітним. Якщо розташувати кільця за мірою їх віддалення від Сатурна, то ми одержимо ряд: D,C,B,A,F,G,E. Смуги кілець складаються з тисяч тонких кілечок шириною до часток кілометра, які чітко відокремлені одне від одного (рис. 12.7), включаючи такі, які спостерігаються із Землі як щілини між кільцями. Лише зовнішні досить розріджені кільця мають помітну товщину у сотні (кільце G) і десятки тисяч (кільце E) кілометрів. Топологія деяких кілець досить складна, зокрема, існують майже перпендикулярні короткоживучі спиці між кілечками. Певні властивості системи кілець Сатурна можна пояснити гравітаційним впливом невеликих внутрішніх супутників та магнітною взаємодією з планетою.

З'ясувалося, що систему тонких кілечок в системі Сатурна можна описати за допомогою множини Кантора (параграфи 2.2, 9.3), де на кожному кроці процедури виключається середня третина лінії одиничної довжини. Отже, і фрактальна розмірність розподілу кілець в системі Сатурна порядку  $D = \log 2/\log 3 \approx 0.63$  [2].

## 12.3.2. Фрактальна розмірність розподілу діаметрів кратерів Місяця, Венери і Марса

Поверхня Місяця, як відомо, характеризується наявністю численних кратерів різних діаметрів, яким не властива певна характеристична довжина (рис. 12.11). Нехай ймовірність того, що будь-який вибраний кратер має розмір, більший ніж *r*, становить P(r). Ця ймовірність пов'язана з густиною ймовірності p(r) співвідношенням  $P\{r\} = \int_{r}^{\infty} p(x)dx$ . Масштабна інваріантність

типу (1.11) потребує, щоб при перетворенні r на  $\lambda \cdot r$  для будьякого позитивного значення  $\lambda$  для ймовірності було справедливим співвідношення  $P(r) \propto P(\lambda \cdot r)$ . Як було показано у параграфі 1.2, ця функція повинна мати степеневу форму  $P(r) \propto r^{-D}$ .

Що означає фрактальна розмірність розподілу діаметрів кратерів на поверхні Місяця? Наприклад, ви спостерігаєте кратери з роздільною здатністю r, тобто кратери з розмірами, меншими ніж r, не виявляються. Кількість спостережуваних кратерів буде пропорційною P(r). Зі зменшенням роздільної здатності удвічі (до 2r) кількість спостережуваних кратерів зменшиться у  $2^{D}$  разів.



РИС. 128. Графік розподілу діаметрів кратерів на Місяці (у логарифмічному масштабі) [20]

Розглянемо рис. 12.8, на якому подано розподіл діаметрів кратерів на Місяці [20]. Неважко побачити, що кумулятивна кількість кратерів з діаметрами, більшими за r, має степеневу залежність вигляду  $N(r) \propto r^{-D}$ , для якої фрактальна розмірність D = 2,0.

Значення фрактальної розмірності виявилося універсальним для розподілу діаметрів як кратерів Місяця, так і Венери та Марса. Оскільки переважна більшість кратерів утворилася унаслідок бомбардування планет і Місяця метеоритами або астероїдами, слід очікувати, що розподіл діаметрів цих тіл також буде фрактальним. Дійсно, для метеоритів з масами, більшими за 100 кг, розподіл мас дотримується степеневого за-

кону з фрактальною розмірністю D = 2,3 [20].

На рис. 12.9 подано графік інтегрального допливу N космічних тіл на Землю з масами, не меншими за M [62]. Для розрахунку цієї величини викори-

рахунку цієї величини використовується формула  $\lg N = -A - -B \lg M$ , де N — число тіл з масами, не меншими за M (в грамах), які на відстані в 1 а. о. перетинають 1 см<sup>2</sup>/с. Величини A і B розраховуються для кожного з інтервалів мас від найдрібніших пилових частинок ( $10^{-12}$ — $10^{-7}$  г) до великих метеороідів (> $10^6$  г) і астероїдів (< $10^{22}$  г).

РИС. 12.9. Графік інтегрального допливу космічних тіл на Землю з масами, не меншими за M [62]





Видно, що залежність  $\lg N$  vs.  $\lg M$  в інтервалі мас астероїдів (A) фактично є продовженням такої залежності для місячних кратерів (L).



РИС. 12.11. Кратери на Місяці

Як показано в [20], порядок величини фрактальної розмірності для астероїдів D = 2,1. Для порівняння розподілів діаметрів кратерів і астероїдів на рис. 12.10 подано розподіл діаметрів астероїдів із так званої ААА-групи (група Атона—Аполона—Амура), наближення яких до Землі є найбільш небезпечним [62].

Як і очікувалося, отримані величини фрактальних розмірностей розподілів кратерів (див. рис. 12.11), метеоритів і астероїдів збігаються зі значенням фрактальної розмірності розподілу розмірів уламків масивної кам'яної глиби D = 2,0 [36], руйнування якої можна описати засобами фрактальної фрагментації (див. параграф 9.2). Таке узгодження фрактальних розмірностей розподілів може бути додатковим підтвердженням теорії спільного формування планет і астероїдів Сонячної системи із планетозималей.

## СЛОВНИК ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ

Атрактор	точка у фазовому просторі, до якої направлена часова історія за мірою затухання нестаціонар- ності (транзієнтів).
Атрактор "чудовий"	фіксована точка у фазовому просторі, в якій ор- біти є хаотичними.
Біфуркація	зміна в динамічній поведінці системи залежно від зміни параметра.
Біфуркація Гопфа	біфуркація з фіксованої точки у граничний цикл.
Біфуркація Пітчфорка	біфуркація, в якій подвоюється період.
Випадковість	вибір, що визначається істинним шансом, нап- риклад кидок монети.
Геометрія розподілу точок	вибірку можна охарактеризувати, вводячи мас- штабні індекси $\alpha_i$ , які пов'язані з ймовірністю знайти відповідну комірку за допомогою співвід- ношення $p_i = \varepsilon^{\alpha_i}$ , де $\varepsilon$ — розмір комірки. Тоді фрактальною розмірністю виступає $f(\alpha)$ — спектр, який однаковий для одного масштабного ін- дексу $\alpha_i$ .
Граничний цикл	періодична орбіта у фазовому просторі, в нап- рямку якої еволюціонує динамічна система за мірою затухання нестаціонарності.
Детерміністична сис- тема	динамічна система, рішення та початкові умо- ви якої повністю визначені і не є стохастични- ми або випадковими.
Експонента Ляпунова	розв'язки детерміністичних рівнянь є хаотич- ними, якщо суміжні розв'язки дивергують екс- поненціально у фазовому просторі. Експонента називається експонентою Ляпунова. Рішення є хаотичними, якщо експонента Ляпунова пози- тивна.

ну фіксовану точку. Область у фазовому про- сторі, в якій розв'язки досягають фіксованої точ- ки, є зоною атрактора такої фіксованої точки. Границі зони атрактора часто бувають фракта- лами.
явище, яке виникає, коли об'єкт є ідентичним (однаковим) на всіх масштабах.
правдоподібність того, що певна подія може трапитися. Правдоподібність того, що після на- ступного кидка монета впаде аверсом, дорів- нює 0,5.
група частинок, утворена за принципом най- ближчого сусіда до кожного з членів групи.
послідовність точок у фазовому просторі, яка утворена завдяки проникненню виділених тра- єкторій крізь визначену планарну (плоску) по- верхню.
$r(N) = (1/N)^{1/d}.$
величина множини точок — кількість елемен- тарних комірок, необхідних для покриття мно- жини точок. Є мірою для розмірності Хаусдор- фа—Безіковича:
$M_d = \sum \gamma(D) N(\varepsilon) \varepsilon^d \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \begin{cases} 0, d > D \\ \infty, d < D \end{cases},$
де $N(\varepsilon) = 1 / \varepsilon^{\overline{\nu}}$ — кількість елементарних комірок.
полягає в тому, що, розбиваючи об'єм, який зай- має вибірка з $N$ точок, на комірки розміром є можна завжди порахувати кількість точок $n(\varepsilon)$ усередині кожної <i>i</i> -ї комірки і знайти ймовірність того, що випадкова точка знаходиться в комірці як $p_i(\varepsilon) = n_i(\varepsilon)/N$ . Моменти цієї міри визначають
нову функцію: $\tau(q) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \sum_{l=1} [p_l(\epsilon)]^d}{\log \epsilon}$ , де у
випадку лінійності цієї функції отримуємо од- норідний фрактал, а у випадку відхилення від лі- нійності — мультифрактал.
фрактальна вибірка, яка утворюється при поді- лі лінії на окремі частини.
послідовність періодичних осциляцій, в яких період дублюється за мірою зміни параметра.

перетворення набору рівнянь з одного масшта-

бу в інший шляхом заміни змінних. Рівняння в кінцевих рівняння, яке пов'язує значення функції x<sub>n+1</sub> з попереднім значенням х<sub>n</sub>. Рівняння в кінцевих різницях різницях породжує дискретний набір значень функції х. Рівняння Лоренца набір трьох диференціальних рівнянь першого порядку, отриманих з рівнянь, що описують теплову конвекцію. Історично ці рівняння стали першим прикладом детерміністичного хаосу. Розмірність прийняте означення розмірності є топологічна розмірність. Розмірність точки є нуль, лінії — один, квадрата — два, куба — три. Концепція фрактальних розмірностей — дробові розмірності. Розмірність клітинна розмірність, яка розраховується за допомогою підрахунку кількості комірок, необхідних для покриття множини точок залежно від розміру комірки є. Розмірність подібності  $D_{\rm s} = -\ln N / \ln r(N).$ степенева величина у фрактальному співвідно-Розмірність фрактальна шенні, D. Розмірність фрактальна  $D_q - (q - 1)^{-1} \tau(q)$ , де у випадку q = 0 отримуємо узагальнена розмірність Хаусдорфа. Розмірність Хаусдорфа степенева величина у степеневому співвідношенні між набором коефіцієнтів Фур'є і відповілними ловжинами хвиль. Розподіл (карта) математичне співвідношення, яке переводить одну або більше точок у інші точки. Самоафінність при афінних перетвореннях різні координати масштабуються різними факторами. Якщо об'єкт масштабується з використанням афінних перетворень, то об'єкт описується як самоафінний. Самополібність властивість набору точок, якщо їхня геометрична структура на певній одиниці масштабу є така сама, як і на іншій одиниці масштабу, тобто можливість покрити множину точок зменшеними копіями цієї множини. Точка вузлова фіксована точка, у напрямку якої еволюціонують рішення. Точка сіллова фіксована точка, яка притягує тільки сингуляр-

ний набір траєкторій.

Ренормування

Фазовий простір	координатний простір, який визначається змін- ними стану динамічної системи (фазовими змін- ними).
Фіксована точка	точка у фазовому просторі, до якої прямує ди- намічна система із затуханням нестаціонарнос- ті (транзієнтів).
Фрактал	співвідношення степеневого характеру між кіль- кістю об'єктів та їх лінійним розміром. Таким чином, фрактал є об'єктом, форма якого не за- лежить від масштабу.
Хаос	розв'язки детерміністичних рівнянь є хаотични- ми. Якщо суміжні рішення дивергують експо- ненціально у фазовому просторі, це потребує позитивної експоненти Ляпунова.
Число Фейгенбаума	відношення послідовних різниць між біфурка- ційними параметрами подвійного періоду дося- гають значення цього числа ( $F = 4/669202$ ).

1. Adelman D., Burmester C.P., Wille L.T. et al. // Phys.: Condense. Matter. - 1992. - 4. - L. 585.

2. Avron J.E., Simon B. // Phys. Rev. Lett. - 1981. - 46. - P. 1166.

3. Badii R., Politi A. Complexity. Hierarchical structures and scaling in physics. – Cambridge University Press, 1997. – 318 p.

4. Barnsley M.F. Fractals Everywhere. - New York: Academic Press, 1988.

5. Becker K.-H., Dorfler M. Dynamical systems and fractals. Computer graphics experiment in Pascal. — Cambridge University Press, 1989. — 398 p.

6. Binder K., Joung A.P. // Rev. Mod. Phys. - 1986. - 58. - P. 801.

7. Coleman P.H., Pietronero L. The fractal structure of the Universe // Phys. Rep., Review Section of Physics Lett. -1992. -213, N 6. -P.311-391.

8. Coleman P.H., Pietronero L., Sanders R.H. // Astron.&Astrophys. – 1988. – 200. – L. 32.

9. Combes F. Astrophysical fractals: interstellar medium and galaxies // astro-ph/9906477. -1999. -1. -30 p.

10. Cycles and chaos in economic equilibrium. — Princeton University Press, 1992. — 475 p.

11. Devaney R.L. A first cource in chaotic dynamical systems. Theory and experiment.

12. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — New York: John Wiley, 1990.

13. Family F., Landau D.P. et al. Aggregation and Gelation. - 1984.

14. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.

15. Kaplan J.C., Yorke J.A. Functional differentian equetions and approximations of fixed points / Ed. H-O Peirgen // Walther Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer. — 1979. — **750**.

16. Lauwerier H.A. Fractals — images of chaos. — Princetion Univ. Press, 1991.

17. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. – 1963. – 20. – P. 130–141.

18. Mandelbrot B.B. Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension. – Paris, 1975.

19. Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Chance and Dimension. — San Francisco, 1977.

20. Mizutani H. The science of craters. - Tokyo Univ. Press, 1980.

21. Peitgen H.-O. The Art of Fractals, A Computer Graphical Introduction. – 1988.

22. Pynn R., Skjeltrop A. et al. Scaling Phenomena in Disordered Systems. - New York, 1985.

23. *Ribeiro M.B., Migueloto A.Y.* Fractals and the distribution of galaxies. Publicacxes do observatyrio Nacional // Brasil, Série Astronomia. — 1997. — N 11/97.

24. Ruelle D. Chance and Chaos.

25. Rutman R.S. On the paper by R.R. Nigmatullin "Fractional integral and its physical interpretation" // Теоретическая и математическая физика. -1994. -100, N 3. -C. 476-478.

26. Rutman R.S. On physical interpretations of fractional integration and differentiation // Tam we. -1995. -105, N 3. -C. 393-404.

27. Russ J.C. Fractal Surface. – Plenum Press, New York; London, 1994.

28. Russel D.A., Hanson J.D., Ott E. // Phys. Rev. Lett. - 1980. - 45, P. 1175.

29. Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. — New York : Springer-Verlag, 1982. — 269 p.

30. *Stauffer D.* Introduction to Percolation Theory. — London : Taylor&-Francis, 1985. — 124 p.

31. *Stinchcombe R.B., Watson B.P.* Renormalization group approach for percolation conductivity // J. Phys. C9. – 1976. – P. 3221–3247.

32. Stinson R.D. Cryptography. Theory and practice.

33. Struzik Z.R. Fractal under the microscope. – 1997.

34. Szalag A.G., Schramm D.N. // Nature. - 1985. - 314. - P. 718.

35. *Takayasu H*. Fractals in the physical sciences. – Manchester Univ. Press, 1990. – 170 p.

36. *Turcotte D.I.* Fractals and chaos in geology and geophysics. – Cambridge Univ. Press, 1992. – 221 p.

37. Voss R.F. Random fractals: characterization and measurement / Ed. R. Pynn & A. Skejeltorp // In: "Scaling Phenomena in Disordered Systems". – Plenum Press, New York, 1985. – P. 1–11.

38. Voss R.F. Random fractals forgeries / Ed. R.A. Earnshaw // In: "Fundamental Algorithms for Computer Graphics". – NATO ASI Series. Springer-Verlag, Berlin. – 1985. – F17. – P. 805–835.

39. Wegner T., Peterson M., Tyler B., Branderhost P. Fractals for Windows. — Weit Group Press, 1992.

40. Абраменко В.И. Фрактальный анализ вихревой структуры магнитного поля на Солнце // Астрономический журнал. — 1999. — 76, № 9. — С. 712—770. 41. Адамсон А.У. Физическая химия поверхностей. — М.: Мир, 1979.

42. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1982. — 255 с.

43. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. — М.: Мир, 1991. — 367 с.

44. Бершадский А.Г. Крупномасштабные фрактальные структуры в лабораторной турбулентности, океане и астрофизике // Успехи физических наук. — 1990. — 160, № 12. — С. 189.

45. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 128 с.

46. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — 148 с.

47. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике. — Киев: Наук. думка, 2005. — 358 с.

48. Вавілова І.Б. Великомасштабна структура Всесвіту: спостереження і методи. — Київ: РВЦ "Київський університет", 1998. — 107 с.

49. Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. — Москва; Ижевск: ИКИ, 2002. — 272 с.

50. Гинзбург С.И. Необратимые явления в спиновых стеклах. — М.: Наука, 1989.

51. Глейк Дж. Хаос. Создание новой науки. — СПб.: Амфора, 2001. — 398 с.

52. Горобець Ю.І., Кучко А.М. Вступ до фізики фрактальних структур. — Тернопіль: Підручники & посібники, 2000. — 128 с.

53. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. — М.: ИЛ, 1948.

54. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. — М.: Постмаркет, 2001.

55. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984. — 271 с.

56. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М., 1988.

57. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. — М., 1991. — 237 с.

58. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук. — 1985. — 146, № 3. — С. 493—506.

59. Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Фракталы в волновых процессах // Там же. — 1995. — 165, № 4. — С. 361—402.

60. Зосимов В.В., Лямшев Л.М. // Акустический журнал. — 1994. — **40**, № 5. — С. 7.

61. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 350 с.

62. Кручиненко В.Г., Волощук Ю.І., Кащеєв Б.Л. та ін. Метеорноастероїдна небезпека та доплив космічної речовини на Землю. — 1998. — 56 с. — (Препр. / ГАО НАНУ; ГАО-98-5У). 63. Кузнецов С.О. Динамический хаос. — 2000. — 295 с.

64. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. — Ижевск: Изд-во РХД, 2002. — 654 с.

65. Могилевский Э.И. Фракталы на Солнце. — М.: Физматлит, 2001. — 151 с.

66. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 160 с.

67. Мун Ф. Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров. — М.: Мир, 1990. — 312 с.

68. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. — 1992. — 90, № 3. — С. 354—368.

69. Олемской А.И., Скляр И.А. Эволюция дефектной структуры твердого тела в процессе пластической деформации // Успехи физических наук. — 1992. — 162, № 6. — С. 29—79.

70. Олемской А.И., Торопов Е.А. Теория аморфного состояния // Физика металлов и металловедение. — 1991. — № 9. — С. 5—29.

71. Олемской А.И. Фрактальная кинетика перестройки кристаллической структуры // Там же. — 1989. — **68**, № 1. — С. 56.

72. Олемской А.И., Паскаль Ю.И. — Томск, 1988. — (Препр. / АН СССР. ИФПМ ТФ СО; № 30).

73. Олемской А.И., Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физических наук. — 1993. — 163, № 12. — С. 1—50.

74. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993. — 176 с.

75. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. — М.: Логос, 2002. — 664 с.

76. Рабинович М.И., Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Успехи физических наук. — 1990. — **160**,  $\mathbb{N}$  1. — С. 3—64.

77. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

78. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука, 1981. — 304 с.

79. Синергетика и усталостное разрушение металлов. — М.: Наука, 1989. — 200 с.

80. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. — М.: Наука, 1991. — 136 с.

81. Соколов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // Успехи физических наук. — 1986. — **150**, № 2. — С. 221—255.

82. *Станиславский А.А.* Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // Теоретическая и математическая физика. — 2004. — **138**, № 3. — С. 491—507.

83. Турбин А.Ф., Працевитый В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 207 с.

84. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

85. Фракталы в физике // Тр. VI Междунар. симп. по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9—12 июля 1985). — М.: Мир, 1988. — 672 с.

86. Шкловский Б.И., Эфрос А.А. Электронные свойства легированных полупроводников. — М., 1979. — 416 с.

87. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 528 с.

88. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988. — 240 с.

## **3MICT**

Передмова	3
Вступ	6
ЧАСТИНА 1. Основні положення фрактальної геометрії	11
РОЗДІЛ 1. <b>Автомодельність та фрактали</b>	13
<ol> <li>1.1. Аналіз розмірностей фізичних величин</li> <li>1.2. Геометрична і фізична подібність. Самоподібність і самоафінність.</li> <li>Розмірність подібності</li> <li>1.3. Застосування аналізу розмірностей для розв'язання задач матема-</li> </ol>	13 20
тичної фізики 1.4. Автомодельність. Проміжна асимптотика 1.5. Автомодельні розв'язки другого роду 1.6. Класифікація автомодельних залежностей. Повна і неповна авто- модельність 1.7. Неповна автомодельність фракталів	23 25 27 32 33
РОЗДІЛ 2. Детерміновані фрактали	37
<ul> <li>2.1. Тріади Коха</li> <li>2.2. Множина Кантора</li> <li>2.3. Криві Серпінського</li> <li>2.4. Відображення пекаря</li> <li>2.5. Відображення Енона</li> <li>2.6. Моделі фракталів Мандельброта і Джулі</li> <li>2.7. Функція Вейєрштрасса—Мандельброта</li> <li>2.8. Методи згортання та розгортання. Бісові сходи</li> <li>2.8.1. Метод згортання</li> <li>2.8.2. Метод розгортання</li> <li>2.9. Побудова фрактальних поверхонь</li> </ul>	37 42 44 46 47 49 51 53 54 56 57
РОЗДІЛ 3. Розмірність та міра	61
<ul> <li>3.1. Топологічна розмірність</li> <li>3.2. Метричне визначення розмірності</li> <li>3.3. Розмірність Хаусдорфа—Безіковича. Поняття міри</li> <li>3.4. Дерево Кейлі. Ультраметричний простір. Міра в ультраметрично- му просторі</li> </ul>	61 68 70 72

-

<ul> <li>3.5. Різні види фрактальних розмірностей</li> <li>3.5.1. Поточкова розмірність</li> <li>3.5.2. Кореляційна розмірність</li> <li>3.5.3. Інформаційна розмірність</li> <li>3.5.4. Розмірності Реньї</li> <li>3.5.5. Спектральна розмірність</li> <li>3.6. Фрактальна розмірність самоафінних множин. Локальна і глобальна розмірності. Внутрішня і зовнішня розмірності</li> </ul>	76 77 79 81 82 83 83
РОЗДІЛ 4. Самоафінні фрактали	90
4.1. Метод нормованого розмаху обчислення розмірностей самоафін-	00
них множин 4.2. Фрактальні часові ряди, довгострокові зміни та статистика Герста 4.3. Властивості самоафінних фракталів	90 91 94
РОЗДІЛ 5. Мультифрактали	102
ЧАСТИНА 2. Застосування фракталів у математиці, фізиці і астрофізиці	110
РОЗДІЛ 6. <b>Дробовий інтеграл і дробова похідна</b>	112
<ul> <li>6.1. Поняття дробового інтегрування та диференціювання. Основні властивості дробового інтеграла та похідної</li> <li>6.2. Інтегральні перетворення дробових інтегралів і дробових похідних</li> <li>6.3. Використання концепції дробового інтегро-диференціювання для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь</li> <li>6.4. Зв'язок між фрактальною множиною Кантора і дробовим інтегралом</li> </ul>	114 119 122 124
6.5. Процеси релаксації в системах із залишковою пам'яттю	131
РОЗДІЛ 7. Термодинаміка і газодинаміка	138
<ul> <li>7.1. Застосування аналізу розмірностей до задач термо- і газодинаміки</li> <li>7.1.1. Теорія турбулентності за Колмогоровим</li> <li>7.1.2. Теорія полімерів Флорі</li> <li>7.1.3. Ударні хвилі</li> <li>7.1.4. Газодинамічні задачі</li> <li>7.2. Узагальнений броунівський рух</li> <li>7.3. Дробове обчислення і броунівський рух</li> <li>7.4. Довгочасні хвости і модель газу Лоренца</li> </ul>	138 138 141 142 143 143 143 146 148
РОЗДІЛ 8. Електродинаміка	152
<ul><li>8.1. Відгук шорсткуватих поверхонь</li><li>8.2. Скін-ефект фрактальних поверхонь</li><li>8.3. Виникнення бісових сходів у спінових системах</li></ul>	152 156 158
РОЗДІЛ 9. Методи ренормування груп, кластеризації і фрагментації	163
<ul><li>9.1. Ренормування груп</li><li>9.2. Фрактальна фрагментація</li></ul>	163 170

9.3. Фрактальна кластеризація	174
РОЗДІЛ 10. <b>Детермінований хаос та нелінійні рівняння</b>	178
10.1. Динаміка нелінійних систем та хаос 10.2. Хаотичні розв'язки	178 186
РОЗДІЛ 11. Коливання та хвилі у фрактальних структурах	192
<ul><li>11.1. Механічні коливання вузлів фрактальних граток</li><li>11.2. Хвильові процеси у квазіперіодичних структурах</li></ul>	192 194
РОЗДІЛ 12. Астрофізика	198
12.1. Великомасштабна структура Всесвіту та фрактальні концепції 12.1.1. Кореляційна функція розподілу галактик і фрактальна розмір- ність	198 198 205
<ul> <li>12.1.2. Моно- 1 мультифрактальна моделі розподілу галактик</li> <li>12.2. Фрактальна структура гігантських молекулярних хмар</li> <li>12.3. Фрактали у Сонячній системі</li> <li>12.3.1. Кільця Сатурна</li> </ul>	203 210 213 214
12.3.2. Фрактальна розмірність розподілу діаметрів кратерів Місяця, Венери і Марса	215
Словник основних термінів	219
Список літератури	223

Навчальний посібник

НАЦІ́ОНАЛЬНА АКАДЕМІ́Я НАУК УКРАЇНИ Міністерство освіти і науки україни

ІНСТИТУТ МАГНЕТИЗМУ ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ГОРОБЕЦЬ Юрій Іванович КУЧКО Андрій Миколайович ВАВИЛОВА Ірина Борисівна

## ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРИРОДОЗНАВСТВІ

Київ, Науково-виробниче підприємство «Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2008

Оформлення та художнє редагування *І.Р. Сільман* Технічний редактор *С.Г. Максимова* Коректор *О.Є. Челок* Комп'ютерна верстка *Т.О. Ценцеус* Оператори *В.Г. Каменькович*, *М.А. Кравченко* 

Малюнок на обкладинці створено авторами з використанням елементів фрактального зображення з сайта Лінди Аллісон http://www.allisonart.com. All fractal images @1995—2000

Підп. до друку 16.04.2008. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1. Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 14,5. Ум. фарбо-відб. 15,0. Обл.-вид. арк. 15,0. Тираж 300 прим. Зам. 8—601.

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України» 01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ЗАТ фірма "Віпол" 03151 Київ 151, вул. Волинська, 60 Свідоцтво про внесення до Державного реєстру серія ДК № 752 від 27.12.2001



Горобець Юрій Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент Академії педагогічних надк України, заступник директора Інституту магнетизму НАН та МОН України, завідувач кафедри загальної та експериментальної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Основні лекційні курси: «Термодинаміка і статистична фізика», «Фізика твердого тіла», «Фізика магнітних явищ». Опублікував 275 наукових праць, у тому числі монографії, навчальні посібники, має авторські свідоцтва про винаходи. Лауреат премії ім. С. І. Пекаря НАН України в галузі фізики та Державної премії у галузі науки і техніки (2007). Заслужений діяч науки і техніки України



Кучко Андрій Миколайович, доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри теоретичної фізики Донецького національного університету. Основні лекційні курси: «Теоретична механіка», «Коливання та хвилі», «Хвильові процеси», «Механіка суцільного середовища», «Фрактали у фізиці», «Фізична кінетика», «Додаткові розділи теоретичної механіки». Опублікував 83 наукові праці



Вавилова Ірина Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент кафедри загальної та експериментальної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». У 1984— 2004 роках працювала в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у 2004— 2007 роках— докторантка ЦДПІН НАН України. З 2008 р. старший науковий співробітник ГАО НАН України. Основні лекційні курси: «Астрофізика», «Позагалактична астрономія», «Актуальні проблеми природознавства». Опублікувала понад 80 наукових праць, у тому числі навчальний посібник, монографії, науково-енциклопедичне видання. Нагороджена орденом княгині Ольги III ступеня